



Stochasticité spontanée de la turbulence de surface quasi- géostrophique

Mémoire de Master Mathématiques Appliquées et
Théoriques présenté par:

Nicolas Valade

Stage effectué à l'**INRIA Sophia-Antipolis**

Inria

Encadré par :

**Jérémie Bec (CNRS) et Simon Thalabard (Univ.
Côte d'Azur)**

28/03/2022 - 28/09/2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes encadrants, Jérémie Bec et Simon Thalabard, pour tout le temps qu'ils me consacrent et les connaissances qu'ils me partagent.

Je remercie également Mireille Bossy ainsi que le reste de l'équipe de recherche et administrative pour votre accueil et l'ambiance agréable qui règne à CALISTO. Je suis très heureux de poursuivre en doctorat à l'Inria avec vous.

Enfin, je tiens à saluer les autres stagiaires, en particulier Matéo pour toutes nos discussions scientifiques et moins scientifiques et Paul, co-bureau et compagnon de stage, chez qui la bonne humeur naturelle compense de loin sa condescendance innée. Merci également à Rousnam pour les trajets en voiture.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Qu'est ce que la turbulence	3
1.1.1	Les principales équations de la mécanique des fluides	3
1.1.2	Quels en sont les problèmes ?	4
1.2	Objectifs et contenu du rapport	5
2	Les équations de Surface Quasi-Géostrophique	6
2.1	Systèmes et notations	6
2.2	Résultats bibliographiques : Existence, unicité et régularité des solutions?	8
2.2.1	SQG invicibles	8
2.2.2	Conditions initiales irrégulières : Patches et filaments	12
2.2.3	SQG dissipatives	13
2.3	La turbulence SQG	14
2.3.1	Les quantités conservées : double cascade	14
2.3.2	Cascade directe : K41 SQG	15
2.3.3	Cascade directe : Intermittence et K62 SQG	21
3	Problème de Cauchy, dissipation anormale et stochasticité spontanée lagrangienne d'un scalaire actif	25
3.1	Vers le régime turbulent	27
3.2	Régime turbulent en déclin: $t > 27$	30
3.2.1	Anomalie Dissipative	31
3.2.2	Distributions, Spectres et transferts	31
3.3	Équivalence entre anomalie dissipative et dispersion des trajectoires lagrangiennes	33
3.4	Statistiques lagrangiennes dans le régime turbulent	38
4	Vers la stochasticité spontanée eulérienne	42
4.1	Motivations	43
4.2	Perturbation instantannée dans le régime turbulent	44
4.2.1	Protocole	44
4.2.2	Simulations hyper-visqueuses	44
4.2.3	Résultats et divergence des champs	47
5	Conclusion et perspectives	53
	Références	56

I	Annexes	60
A	Instabilité Filament	60
B	Karman-Howarth-Monin SQG	62

1 Introduction

Pourrons nous un jour prédire la météo à l'infini ? François Lalaurette, directeur des opérations pour la prévision chez Météo France explique que "nous gagnons en moyenne un jour de prévision tous les 10 ans depuis les 30 dernières années" pour des événements d'intensités et tailles classiques. Cela est dû à l'augmentation de la quantité de données récoltées, la capacité à les traiter ainsi qu'à l'augmentation de la précision des modèles et de la puissance de calcul des ordinateurs. Mais pourrait-il y avoir une limite ? La première difficulté de la prédiction sur les temps long a été introduite pour la première fois par Lorenz [1] en 1963 (bien que précédemment observée par Poincaré [2]). Il y décrit son fameux modèle de l'atmosphère à trois équations qui présente un comportement chaotique : une très faible perturbation de l'état initial va croître exponentiellement et donc s'amplifier petit à petit pour donner alors lieu à des réalisations totalement différentes aux temps longs. Cette extrême sensibilité d'un système aux conditions initiales est alors connue dans le domaine commun comme "l'effet papillon" ou le comportement chaotique des systèmes dynamiques. Or l'atmosphère est un gigantesque système dynamique tel que la différence entre les structures de plus grandes et plus petites tailles est de plus 7 ou 8 ordres de grandeurs. Il est alors quasi-impossible d'en connaître l'état réel à un instant donné et cette méconnaissance se trouve être une des raisons des limites actuelles de la prédiction météorologique.

Cependant, quand Lorenz [3] avait lui même introduit l'expression "effet papillon" dans son second article fondateur en 1969, il décrivait un comportement infiniment plus imprédictible que cette divergence chaotique. Il présentait alors que pour certains systèmes, il peut exister un horizon fini de prévision, quelle que soit la force de calcul ou la connaissance de l'état initial. Les solutions s'y dispersent de manière explosive. Plus que la divergence progressive des solutions à partir d'une petite différence, les systèmes décrits par Lorenz n'auraient pas une dépendance continue en fonction des conditions initiales (cf. schéma fig. 15), i.e. deux solutions peuvent être totalement différentes pour des conditions initiales quasi-similaires (et donc seraient infiniment sensibles aux petits bruits). Ce type de comportement peut également être lié à la non-unicité des solutions (ce qui serait encore plus imprédictible). Lorenz émet d'ailleurs l'hypothèse que ce comportement est présent dans les fluides dont de nombreuses échelles de tailles différentes sont présentes. Il en montre alors un modèle simple (dont les hypothèses sont contestables) où la moindre petite perturbation va conduire et des différences notables en remontant jusqu'aux plus grandes échelles de l'écoulement en un temps fini !

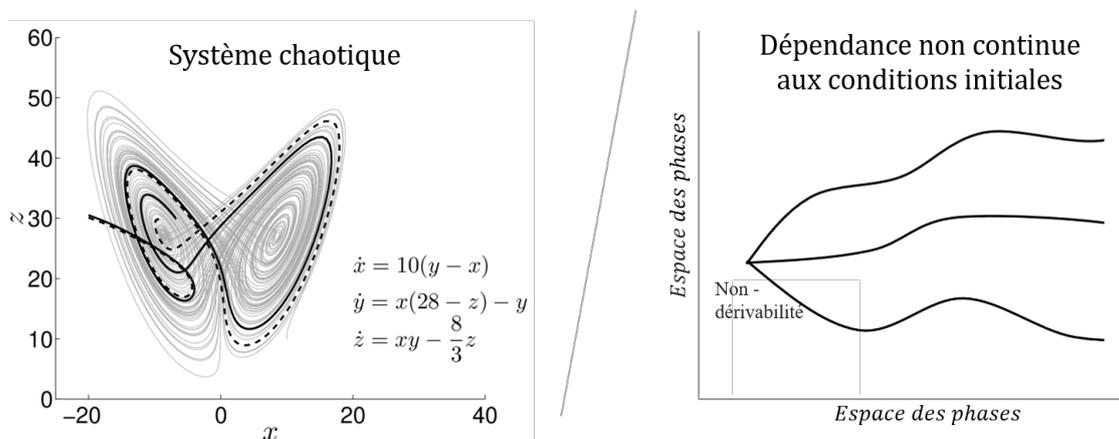


Figure 1: Systèmes dynamiques chaotiques versus réel effet papillon. A gauche, trajectoires autour de l'attracteur de Lorenz [1]. A droite, schéma de l'évolution de 3 trajectoires lorsque le problème est mathématiquement "mal posé" et ne dépend pas continûment de la condition initiale.

Savoir si les écoulements géophysiques possèdent bien cette caractéristiques est d'importance principale pour les météorologistes mais s'impose également comme un problème fondamentale de l'étude de la dynamique des fluides.

Les fluides et gaz condensés sont présents partout dans notre vie courante, de l'industrie à l'astrophysique, et même notre corps est composé à 70% d'eau (écoulement sanguin, ...). Comme pour l'étude de la matière solide, les fluides sont caractérisés par plusieurs comportements, dépendant des sollicitations et forces externes et internes auxquelles ils sont soumis. Dans son article de 1969, Lorenz fait évidemment référence aux écoulements turbulents.

La turbulence va être l'objet central de ce rapport. Cependant, il n'y a pas de définition officielle de ce qu'est la turbulence [4]. Dans le langage commun, un enfant turbulent court partout, s'agite, et ne reste pas calme. On dit aussi que la bourse est turbulente lorsqu'elle est difficilement prédictible et que des événements politiques ou sociaux peuvent totalement modifier son cours. En résumé, le sens commun du terme turbulence relève d'une vision instable, violente, désordonnée, et chaotique. Cependant, lorsque l'on regarde un écoulement turbulent, nous pouvons voir des structures organisées, cohérentes : les tourbillons. De telles structures sont si remarquables qu'elles ont attiré l'attention d'artistes de toutes les origines (voir fig.2). Ainsi Van Gogh, De Vinci, ou Hiroshige ont représenté des écoulements de la vie de tous les jours, de taille humaine (de quelques centimètres à plusieurs mètres) qui sont turbulents. Cependant, les structures en tourbillon se retrouvent aussi à toutes les échelles de la physique, des plus petites de la taille de l'Angström (condensat de Bose-Einstein dans les super fluides) aux plus grandes de l'ordre du parsec dans les Galaxies spirales (voir fig.4). Ces derniers semblent caractéristiques de la turbulence et les tourbillons peuvent alors servir de définition à la turbulence. Pourtant, lorsque l'on regarde plus précisément, d'autres structures, comme des filaments, sont identifiables. La turbulence n'est alors pas faite "que de vortex". La création, l'évolution et l'ordre / désordre de toutes ses structures, ainsi que leur impact sur les grandes échelles de l'écoulement appelle à une compréhension fine et une théorie complète de la turbulence. Le problème reste cependant encore ouvert malgré les efforts conjugués des scientifiques les plus brillants depuis plus de 200 ans depuis que les équations du mouvement des fluides ont été écrites par Navier et Stokes.



Figure 2: Représentation artistiques d'écoulements turbulents. En haut à gauche : Van Gogh, Nuit étoilée. En bas à gauche : Da Vinci, esquisse. A droite : Hiroshige, estampe de Naruto

1.1 Qu'est ce que la turbulence

Ainsi, la turbulence est¹, à l'image de l'unification entre la mécanique quantique et de la gravité, un des grands problèmes fondamentaux de la physique. En revanche pour la turbulence, les équations maîtresses sont connues.

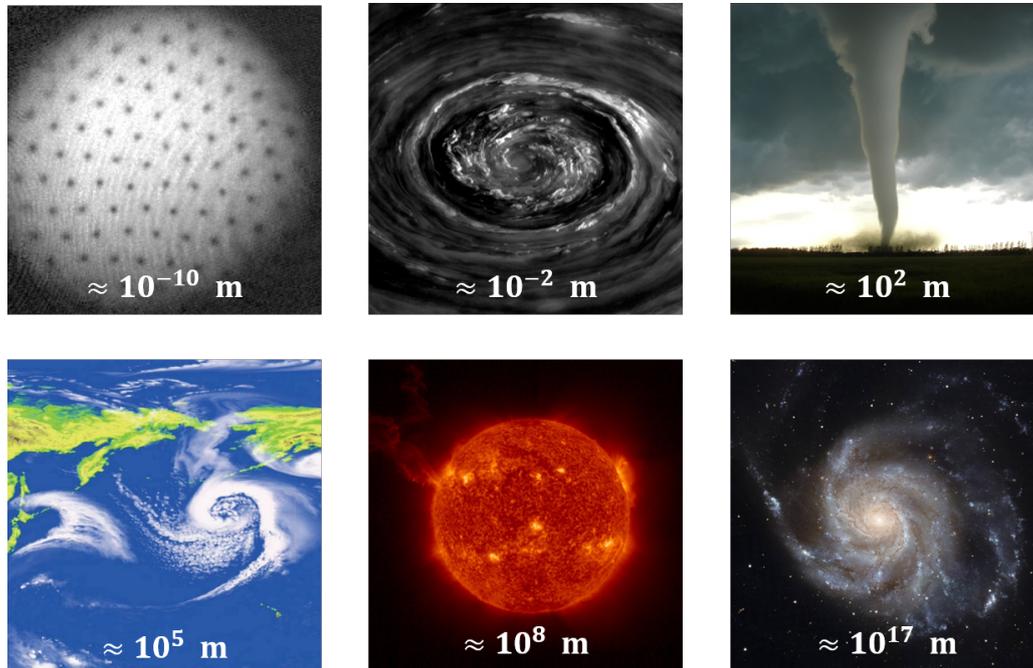


Figure 3: Les tourbillons sont des structures présentes à de nombreuses échelles. De gauche à droite et de haut en bas : vortex quantiques dans un superfluide, tourbillon dans une piscine, tornade, écoulement géophysique, tourbillon dans les tâches solaires, galaxie spirale. Inspirée de [4].

1.1.1 Les principales équations de la mécanique des fluides

Les équations principales, pour les fluides visqueux non chargés, à l'échelle du laboratoire, sont les équations de **Navier-Stokes Incompressibles (NS)** :

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i &= -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j \partial_j u_i + f_i, & (\text{Équations de Navier Stokes}) \\ \partial_j u_j &= 0 \end{aligned}$$

où u_i est le champ de vitesse (dimension d), p la pression, ρ la densité, f_i est une force externe et ν la viscosité cinématique du fluide. Les équations précédentes se réécrivent en introduisant L et U les taille et vitesse caractéristiques de l'écoulement et Reynolds a alors montré que les caractéristiques de l'écoulement ne dépendent plus que d'un seul paramètre, le nombre de Reynolds : $Re = \frac{UL}{\nu}$.

Afin d'insister sur le fait que les équations fluides et la turbulence se retrouvent à toutes les échelles de la physique, nous introduisons les deux autres principales équations de la mécanique des fluides à partir de cas particuliers où des tourbillons sont aussi observés.

¹Cette introduction de la turbulence est fortement inspirée de celle du cours du master ICFP de Bérengère Dubrulle [4].

Ainsi, à très petite échelle et très faible température ($<2.17\text{K}$), des condensats de Bose Einstein se forment dans l'Helium 4 qui devient "super fluide". Dans ce cas, le fluide se décrit à partir de l'équation quantique de Gross-Pitaevskii. Cependant, la transformation de Madelung [4] permet de réécrire le mouvement du fluide tel que:

$$\begin{aligned}\partial_t u_i + u_j \partial_j u_i &= -\partial_i p, & (\text{Équations d'Euler compressibles}) \\ \partial_t \rho + \partial_j u_j \rho &= 0\end{aligned}$$

où u , ρ et p sont définies à partir de la fonction d'onde et des constantes du problème.

Ce sont les équations d'Euler compressible (EC) (auxquelles il faut rajouter une équation de fermeture entre p , ρ et u). Si ρ est constant, alors le système est fermé et ces équations sont les équations d'**Euler incompressible (EI)**.

Enfin, à très grande échelle, l'Univers peut se décrire à partir des équations de Newton dans une géométrie plate et en expansion. Cette fois, en utilisant la transformation de Zeldovitch [4], le système est parfaitement décrit par :

$$\begin{aligned}\partial_t V_i + V_j \partial_j V_i &= 0 & (\text{Équations de Burgers invicides}) \\ V_i &= -\partial_i \psi\end{aligned}$$

qui sont les **équations de Burgers invicides** (sans la viscosité qui peut être rajoutée). Ce système peut être vu comme celui de Navier Stokes sans pression, et sans vorticité ($\nabla \times V = 0$).

Ces trois systèmes, NSI, EI et Burgers, sont les principales équations aux d riv es partielles (EDP) de la mécanique des fluides et sont celles qui ont été les plus  tudi es par la communauté de la turbulence [5, 6, 7].

1.1.2 Quels en sont les problèmes ?

Bien que pour la turbulence les équations soient connues, elles résistent aux analyses théoriques, expérimentales et numériques depuis plus de 200 ans.

Remarquons tout de même que le cas des équations de Burgers est légèrement diff rent car la plupart des résultats théoriques y ont été établis [5]. Elles n'interviennent alors principalement plus qu'en tant que "modèles jouets" dans l'étude des équations d'Euler et de Navier Stokes.

Ainsi, premièrement, il n'est toujours pas su si les équations de Navier Stokes et Euler admettent une solution unique pour tous les temps à partir d'une condition initiale lisse (i.e. C^∞), et qu'une non-dérivabilité du champs de vitesse ne va pas apparaître au bout d'un temps fini. Pour Navier Stokes, bien que le problème soit encore ouvert pour les mathématiciens, il semble raisonnable de penser que la viscosité prévient de cet effet en lissant les petites échelles.

De plus, de manière générique, l'arriv e de non dérivabilité dans l'écoulement est associ e à la présence de tourbillons de toutes les tailles, jusqu'au plus petites échelles atteignables. Leur organisation et la manière dont la dynamique crée ces structures n'est qu'en partie comprise et la plupart des descriptions de ce phénomène repose sur le modèle de cascade introduite phénoménologiquement par Richardson [8] puis posé mathématiquement par Kolmogorov en 1941 [9]. S'il permet une bonne description des grandes échelles, il est en défaut pour décrire finement l'organisation des petites échelles (intermittence, etc). Il n'existe alors pas de modèle complet, sans hypothèse ad-hoc, et partant du premier principe de la thermodynamique, qui permettrait de décrire l'ensemble des statistiques de l'écoulement.

Troisièmement, il faut noter que l'observation expérimentale et la simulation numérique des équations de Navier Stokes sont extrêmement délicates, justement à cause de la grande gamme d'échelles de taille et de temps qui sont en jeux. Par exemple, la simulation numérique nécessite la discrétisation du domaine spatial et temporel et, pour représenter un tour des plus grands tourbillons d'un écoulement de nombre de Reynolds Re , il faudra $O(Re^{11/4})$ calculs [6]. Pour l'écoulement atmosphérique, dont les grandes échelles sont plus de 8 ordres de grandeurs plus grandes que les plus petites tourbillons, il faudrait attendre près de 10^{13} années sur le plus puissant super-calculateur actuel. Ce n'est donc pas possible d'étudier directement numériquement la turbulence de ces phénomènes. Il faut des modèles qui permettent de rendre compte de l'influence des petites structures sur les plus grandes sans les modéliser directement. Cela fait aussi partie de l'enjeu de compréhension de la turbulence.

Enfin, dans la limite fortement turbulente telle $Re \rightarrow \infty$ ou $\nu \rightarrow 0$, l'écoulement devient de plus en plus singulier (à cause de la création de tourbillon de plus en plus petits). Ainsi, la presque non dérivabilité du champs de vitesse pourrait avoir des répercussions sur le bien posé mathématique des équations de Navier Stokes dans la limite turbulente [10]. C'est à dire, est ce que les solutions dépendent continûment des conditions ou si pour deux champs initialement presque identique, leur évolution va totalement différer jusqu'aux grandes échelles en un temps court? C'est ce à quoi fait référence Lorenz en 69 dans son modèle de "réel effet papillon" ou de prédictibilité limite atteignable dans les fluides dont un grand nombre d'échelle est en jeu. Compte tenu de la difficulté théorique et numérique des équations de Navier Stokes 3D, il n'y a à ma connaissance aucune preuve ou mise en évidence claire, directement sur les équations sans modèle, de ce type de phénomène.

1.2 Objectifs et contenu du rapport

Dans le contexte décrit précédemment, Jérémie Bec et Simon Thalabard proposent d'utiliser les équations de Surface Quasi-Géostrophique (SQG) afin d'y étudier la sensibilité des champs à la condition initiale et aux perturbations de l'écoulement. Les équations SQG décrivent la dynamique des fluides stratifiés en présence d'un écoulement en rotation et servent à l'étude du champ de température de la surface des océans par exemple. Ce sont donc des équations 2D et scalaire mais qui présentent des similarités fortes avec les équations de Navier Stokes 3D. Les simulations numériques sont donc moins coûteuses et permettent de modéliser des écoulements bien plus turbulents tandis que l'étude d'une équation scalaire est plus simple théoriquement. C'est pourquoi elles ont été introduites à la communauté mathématique par Constantin et al. en [11] puis à la communauté de la turbulence par Held en [12]. Depuis, de nombreuses études l'ont reprise et les équations SQG peuvent être vues comme un laboratoire d'expérimentations numériques des équations de Navier Stokes.

Ainsi, dans ce stage, dont je vais poursuivre les travaux en thèse, l'objectif est d'étudier et de modéliser les propriétés de divergence des solutions dans la limite turbulente. Dans ce rapport, après avoir présenté dans la partie II les équations, les principaux résultats mathématiques connus et les caractéristiques de la turbulence SQG, nous nous focalisons dans la partie III sur l'étude de la dynamique SQG à partir de la condition initiale lisse proposée dans Constantin et al. [11]. S'il n'est pas clair qu'une singularité apparaisse en temps fini dans l'écoulement, nous observons en pratique que la dissipation de l'énergie du sclaire persiste dans la limite où la viscosité tend vers 0. Dans ce cas, Gawedzki [13] et Drivas et al. [14] ont montré que cela est lié à la mauvaise définition des trajectoires de l'écoulement : appelée **stochasticité spontanée lagrangienne**. Ensuite, nous nous intéressons dans la partie IV à l'imprédictibilité du champ tout entier, i.e. au réel effet papillon dans SQG aussi appelé **stochasticité spontanée**

eulérienne. Finalement, la dernière partie conclut le travail et dresse les perspectives pour les prochains mois.

2 Les équations de Surface Quasi-Géostrophique

Les équations de Surface Quasi-Géostrophiques (SQG), introduites par Blumen [15] en 1978, décrivent la dynamique bi-dimensionnelle d'un scalaire, par exemple la température de surface de l'océan, dans un fluide 3D qui est

1. en rotation rapide, par exemple lorsque la vitesse de rotation de la Terre est grande devant celle des structures caractéristiques (faible nombre de Rosby),
2. stratifié verticalement, i.e. un fort gradient de densité ou de température permet de considérer une dynamique principalement 2D horizontale, et dont la dynamique verticale peut être fermée à partir des informations sur la surface (faible nombre de Froude),
3. et où la vorticité potentielle est uniforme et constante.

La description complète du système et des hypothèses utilisées est présentée dans [16].

Ces équations sont alors intensivement utilisées dans l'étude du mouvement des surfaces océaniques ainsi que des écoulements dans la stratosphère. De plus, l'étude des propriétes mathématiques du système SQG a été proposée en 1994 par Constantin, Tabak et Majda [11], mettant en avant ses similitudes avec les équations d'Euler et de Navier-Stokes 3D. Enfin, ce modèle, qui décrit une évolution d'un champ 2D tout en prenant en compte des phénomenes 3D, a également attir e la communauté de la turbulence dans les systèmes géophysiques [12] pour sa capacité à mimer des résultats 3D tout en étant numériquement moins coûteux à simuler.

Dans la suite de cette partie, après avoir explicit e les équations en 2.1, les sous parties 2.2 et 2.3 résument les principaux résultats de différents articles de mathématiques, à la hauteur du niveau de compréhension d'un étudiant en physique. Ces derniers portent sur les équations SQG et associées et traitent de divers aspects quant à l'existence des solutions et  a leur régularité (dérivabilité du champ de vitesse). L'accent a été mis en premier lieu sur des résultats ayant des implications claires pour la physique de l'écoulement SQG. De plus, par souci de complétude, nous avons essay e à chaque fois de rappeler les résultats connus et équivalent pour les équations de Euler 3D et de Navier Stokes 3D (NS3).

Enfin, la dernière sous partie présente des résultats et statistiques turbulentes issus de simulations numériques directes que j'ai effectuées pendant mon stage.

2.1 Systèmes et notations

Le système SQG s'écrit:

$$\partial_t \theta + u \nabla \theta + \nu (-\Delta)^p \theta = 0 \tag{2.1}$$

où $\theta(x, t)$ est un scalaire, représentant le champ de température de surface, et $x \in \mathbb{R}^2$ l'espace entier ou \mathbb{T}^2 , une boite périodique. La viscosité ν et le coefficient de régularisation p sont des paramètres fixes. Enfin, $u = (u_1, u_2)$ est le champ de vitesse de l'écoulement, de divergence nulle, tel qu'il existe une fonction de courant ψ et

$$(u_1, u_2) = (-\partial_2 \psi, \partial_1 \psi)$$

De plus, la température de surface θ est reliée à ψ par

$$(-\Delta)^{1/2}\psi = \theta.$$

On notera dans la suite $\Lambda = (-\Delta)^{1/2}$ et $\nabla^\perp = (-\partial_2, \partial_1)$. Ainsi,

$$u = \nabla^\perp \Lambda \theta = (-R_2 \theta, R_1 \theta)$$

où R_i est la transformée de Riesz. Le système est donc fermé et u se déduit de la convolution entre θ , le scalaire actif, et un noyau non-local tel que

$$u_i = s_{ij} \int \int_{\mathcal{D}} \frac{\theta(y, t)(x_j - y_j)}{\|x - y\|^3} dy \quad (2.2)$$

avec $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ où \mathbb{T}^2 , $s_{ij} = \pm 1$ pour $i \neq j$ et $s_{ij} = 0$ sinon.

Enfin, le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^p$ est défini à partir de la transformée de Fourier \mathcal{F} telle que :

$$\mathcal{F}((-\Delta)^p \theta) = |k|^{2p} \mathcal{F}(\theta).$$

Dans l'espace de Fourier, u et θ sont donc simplement liés par

$$\mathcal{F}(u)_k = \frac{i(-k_2 \mathcal{F}(\theta)_k, k_1 \mathcal{F}(\theta)_k)}{|k|} \quad (2.3)$$

Suivant la valeur de ν et p , on classe l'équation (2.1) de la sorte :

- $\nu = 0$, l'équation (1) est nommée SQG invicidés
- $\nu > 0$, l'équation (1) est nommée SQG dissipatives

Les équations SQG dissipatives ont également un sous classement:

- $p > 1/2$, l'équation (1) est nommée SQG sub-critiques
- $p = 1/2$, l'équation (1) est nommée SQG critiques
- $p < 1/2$, l'équation (1) est nommée SQG sur-critiques

Un terme supplémentaire peut également être appliqué à l'équation (2.1) tel que :

$$\partial_t \theta + u \nabla \theta + \nu (-\Delta)^p \theta = f(x, t). \quad (2.4)$$

f ne dépend pas de θ et agit comme un forçage extérieur. Ainsi, on qualifiera l'équation (2.4) de *SQG invicidés/dissipatives forcées*.

Depuis [11], l'étude des équations SQG est en forte effervescence. En effet, le système SQG est un problème scalaire, 2D et sans présence du terme non local de pression. Ce problème est donc plus simple que celui des équations de Euler 3D, autant d'un point de vue numérique que théorique. Cependant, il existe des connexions fortes entre ces deux systèmes [11] et les

équations SQG peuvent être considérées comme un modèle simplifié pour l'étude d'Euler 3D. Premièrement, nous remarquons que l'équation pour $\nabla^\perp \theta$ est:

$$\frac{D\nabla^\perp \theta}{Dt} = (\nabla u) \nabla^\perp \theta$$

où $\frac{D}{Dt}$ est la dérivée particulaire. Pour la vorticité dans l'équation Euler 3D, il vient :

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\nabla u) \omega$$

avec ω la vorticité: $\omega = \nabla \times u$ et $\nabla \cdot u = 0$. Ainsi, il existe une **analogie géométrique** entre les courbes de niveau de θ ( quivalentes à ∇^\perp) et les lignes de vorticité dans Euler, toutes deux transport es par l'écoulement.

De plus, dans les deux cas la relation entre $\zeta = \omega$ (Euler) ou $\zeta = \nabla^\perp \theta$ (SQG) et le champ de vitesse u est :

$$u(x, t) = \int_{\mathcal{D}} K_d(y) \zeta(x + y, t) dy,$$

où K_d est un noyau homogène de degrés 1-d. C'est **l'analogie analytique**. Par ailleurs, ce noyau est plus singulier que le noyau logarithmique qui relie u et ω dans les équations de Euler 2D. **Ainsi, SQG semble un meilleur candidat que Euler 2D pour étudier le cas 3D.**

2.2 Résultats bibliographiques : Existence, unicité et régularité des solutions?

Intensivement  tudi es par les mathématiciens depuis près de 30 ans, de nombreuses propriétés des équations SQG ont été d montr es dans la littérature. Comme nous nous intéressons dans ce rapport à la limite turbulente, i.e. $\nu \rightarrow 0$, il est important d'avoir une idée : 1/ des propriétés du système invicidé $\nu = 0$, 2/ des configurations instables pouvant conduire à l'apparition de points singuliers dans l'écoulement et 3/ de l'existence et unicité de θ pour tous les temps lorsque la viscosité reste finie $\nu > 0$.

2.2.1 SQG invicidés

Existence et unicité ?

Les quatre principaux résultats pour les équations SQG invicidés sont :

Propriété 1 (SQG Invicid  : Existence et unicité).

1. Existence et unicité locale de la solution lisse à partir d'une condition initiale lisse [11]
2. Un critère d'apparition d'une singularité en temps fini [11]
3. Existence globale dans L^2 des solutions faibles [17]
4. Non-unicité des solutions faibles en dessous d'un seuil de régularité [18] (condition initiale non dérivable appartenant à un espace fonctionnel irrégulier).

Pour les points 1. et 2., Constantin et al. [11] ont démontré :

Théorème 1 a) Si $\theta_0 = \theta(x, 0)$ appartient à l'espace de Hölder sur le tore² $H^m(\mathbb{T})$ avec $m \geq 3$ alors il existe $T_* > 0$ et θ une solution unique des équations SQG invicidas telle que $\theta \in C([0, T_*[; H^m)$.

b) $[0, T_*[$ est maximal³ pour $T_* < \infty$, si et seulement si $\lim_{T \rightarrow T_*} \int_0^T \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} dt = \infty$.

Remarque 1 : la condition nécessaire et suffisante de perte de régularité de la solution, i.e. $T_* < \infty$, est équivalente à celle proposée par Beale, Kato et Majda [19] pour les équations d'Euler 3D telle que :

$$[0, T_*[\text{ maximal de la solution lisse de Euler 3D} \Leftrightarrow \lim_{T \rightarrow T_*} \int_0^T \|\omega\|_{L^\infty} dt = \infty$$

Remarque 2 : H^3 est plus régulier que C^1 qui ne doit pas suffire (a priori pour s'assurer de bornes L^∞ sur le champ de vitesse).

Ainsi, pour une condition initiale analytique (infiniment lisse), comme celles proposées par Constantin et al., il y a bien une unique solution qui reste lisse, au moins jusqu'à un temps $T_* > 0$ où apparaîtra peut être une singularité, i.e. une explosion du gradient de θ .

Si un telle singularité apparaît, ou si la condition initiale appartenait de base à un espace fonctionnelle moins régulier que C^1 , le problème SQG existe toujours s'il est défini *au sens faible*, i.e. les solutions sont des distributions :

Définition 1 (*Solutions faibles de SQG invicidas*).

Soit θ une solution faible des équations SQG, alors pour toutes fonctions test $\phi \in C^\infty$,

$$\int_{\mathcal{D}} (\theta(T) - \theta(0)) \phi dx + \int_0^T \int_{\mathcal{D}} \theta u \nabla \phi dx dt = 0 \quad (2.5)$$

Remarque 3 : Dans cette formulation, les dérivées portent sur les fonctions test ϕ . Notons que si θ est une solution forte (classique) des équations SQG, alors les formulations faible et forte sont équivalentes, reliée par une intégration par partie.

A partir de la définition des solutions faibles de SQG, Resnik [17] montre que :

Théorème 2 Soit $\theta_0 \in L^2(\mathcal{D})$ et T un temps arbitraire. Alors, il existe au moins une solution $\theta(x, t)$ de 2.5 tel que $\theta \in L^2$ sur $[0, T]$.

Ce théorème, démontré dans la thèse de Resnick (encadrée par Constantin) grâce aux propriétés particulières de la transformation de Riesz, n'existe pas pour Euler 3D et le problème de l'existence globale est encore ouvert.

Ainsi, même si une singularité apparaît en temps fini à partir d'une condition initiale lisse, il est toujours possible de parler de solution de SQG invicide (au sens faible dans L^2) pour tout temps.

Enfin la non unicité des solutions faibles des équations SQG invicidas a été traitée récemment par Buckmaster, Shkoller et Vicol [18] (point 4). Pour cela, ils définissent

$$\mathcal{H} = \|\theta(\cdot, t)\|_{\dot{H}^{-1/2}}^2 = \langle \Lambda^{-1} \theta, \theta \rangle$$

²Espace de Hölder : $f \in H^m(\mathbb{T})$ alors $\sum |k|^{2m} |C_k|^2 < \infty$ avec (C_k) tel que $\forall x, f(x) = \sum C_k e^{ikx}$.

³Maximal : il n'est pas possible de prolonger la solution sur H^m pour $t \geq T_*$

où \langle, \rangle est le produit scalaire usuel sur $L^2(\mathcal{D})$. \mathcal{H} est en réalité le *Hamiltonien* associé à la formulation variationnelle dont découle les équations SQG [17]. Cette quantité est d'ailleurs importante dans la dynamique turbulente comme nous le verrons dans la suite.

Ainsi, pour une solution forte de SQG invicidés, il est aisé de montrer que :

$$\mathcal{H}(t) = \langle \Lambda^{-1}\theta(0), \theta(0) \rangle = \mathcal{H}(0) \quad : \quad \text{le Hamiltonien est un invariant de la dynamique.}$$

Buckmaster et al. [18] questionnent la validité de cette relation dans le cas des solutions faibles et démontrent alors :

Théorème 3 (*Non unicité des solutions faibles*).

$\Lambda^{-1}\theta \in \mathcal{C}^\gamma$, $\gamma < 4/5 \Leftrightarrow \exists \theta$ une solution faible de SQG pour toutes fonctions $t \mapsto \mathcal{H}(t)$ à support compact⁴.

Premièrement cela prouve que la fonction $\theta \equiv 0$ n'est pas la seule solution faible qui est nulle dans le complémentaire du support de \mathcal{H} et donc qu'il n'y a pas unicité des solutions faibles. De plus, le choix arbitraire du profil du Hamiltonien permet de construire des solutions faibles, dissipatives (dans le sens où \mathcal{H} est décroissant) du problème SQG invicide. De Lellis, Shkoller et Buckmaster ont montré des résultats équivalents pour les équations de Euler 3D.

Remarque 4: Le critère de la conjecture d'Onsager, i.e. le lien entre la régularité de l'écoulement et la dissipation du Hamiltonien des solutions SQG invicidés, est $\gamma < 1$. La borne démontrée par Buckmaster et al. est $\gamma < 4/5$: la conjecture d'Onsager dans SQG pour \mathcal{H} est donc encore un problème ouvert proche du coefficient critique.

Revenons sur les points 1. et 2. Ces derniers nous indiquent que, comme pour les équations d'Euler, une unique solution existe à partir d'une condition initiale lisse jusqu'à $T_* > 0$. La question est alors de savoir si $T_* < \infty$, est fini, ou si θ restera toujours la solution lisse et unique du problème.

Apparition d'une singularité en temps fini ?

L'apparition d'une singularité en temps fini dans les équations SQG invicidés, comme dans celles de Euler 3D, reste un problème majeur de la physique mathématique. En revanche, pour les équations de Euler 2D, des résultats d'existence et unicité globaux existent [20].

Lorsque Constantin et al. proposent l'étude de SQG, ils s'interrogent de plus sur la genèse de fronts singuliers en temps fini. Ils démontrent que si la géométrie des courbes de niveau de θ est simple et ne contient pas de points cols hyperboliques dans la région fortement non linéaire, alors la solution reste régulière. De plus, ils présentent une potentielle explosion de $\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty}$ à partir d'une condition initiale hyperbolique [11]. Enfin, Constantin et al. montrent que $\int_{\mathcal{D}} \kappa |\nabla^\perp \theta|$ est un invariant du mouvement, avec κ la courbure des lignes de niveau. Ainsi, lorsque $\nabla^\perp \theta$ devient grand, si la courbure n'oscille pas *sauvagement*, alors $\kappa \rightarrow 0$ et le profil se lisse pour former une ligne singulière.

Cependant, Cordobã et al. [21] démontrent que la croissance de $\nabla^\perp \theta$ au niveau d'un point *hyperbolique simple* est bornée par une quadruple exponentielle. Ainsi, si la dynamique de la condition initiale CTM ne modifie pas la géométrie du point hyperbolique initial, **ce n'est pas une singularité.**

⁴ \mathcal{C}^γ : $f \in \mathcal{C}^\gamma$ alors $\lim_{y \rightarrow x} f(x) - f(y) \approx (y - x)^\gamma$.

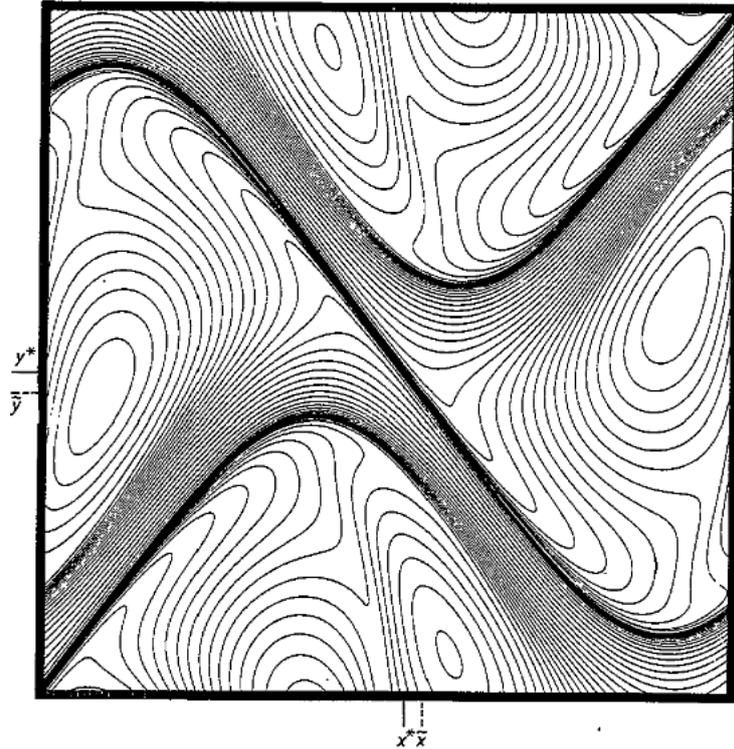


Figure 4: Ligne de niveau de θ à partir de la condition initiale de Constantin à $t = 7.5$ (gradient maximum). Figure 5 de [11].

De plus, Sharma [22] et séparément Deng, Hou et Wu [23] ont établi des bornes supérieures plus strictes en double et triple exponentielle à partir d'autres hypothèses sur la géométrie des lignes de niveau de θ . La borne en double exponentielle est peut être atteinte d'après les observations de Ohkitani et Yamada [24] et Constantin et al. [25]⁵. Ainsi, il ne peut pas y avoir d'explosion des solutions de SQG invicids, en conservant la régularité de la courbure des lignes de niveau de θ . Les fronts singuliers n'existent donc pas a priori.

Indépendamment, Castro et Cordobá [26] ont montré l'apparition de singularités en temps fini pour des conditions initiales d'énergie infinie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ l'espace entier.

Enfin, Yang [27] démontre l'explosion de solutions lisses dans des équations SQG modifiées, dites hyperboliques, où la relation entre θ et le champ de vitesse, toujours incompressible, s'écrit :

$$u(x, t) = \left(-x_2 \int_{y_1, y_2 > x_1, x_2} \frac{\theta(y, t)}{|y|^3}, x_1 \int_{y_1, y_2 > x_1, x_2} \frac{\theta(y, t)}{|y|^3} \right).$$

Un résultat similaire existe pour les équations de Euler 3D Hyperboliques [28].

Ainsi, comme pour les eq. d'Euler 3D, les solutions SQG invicids sont suspectées de pouvoir développer des singularité en temps fini. Le problème reste toutefois ouvert. Cependant, d'autres configurations initiales, singulières, semblent se déstabiliser et conduire à une nouvelle singularité. Ce sont les patches filamenteux.

⁵Notons que numériquement, une croissance en double ou triple exponentielle est difficilement distinguable d'une divergence en temps fini à cause de la limite de résolution.

2.2.2 Conditions initiales irrégulières : Patches et filaments

Les *patches* forment une classe particulière de **solutions faibles** de SQG invicible où θ est défini par une **fonction discontinue** (voir 5) :

$$\theta(x, t) = \begin{cases} \theta_1 & \text{si } x \in \Omega(t) \\ \theta_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\Omega(0) \in \mathcal{D}$ donné par la distribution initiale de θ et $\Omega(t)$ est l'évolution de $\Omega(0)$ par l'écoulement. Une telle évolution est totalement déterminée par le mouvement de l'interface, permettant de traiter ce problème comme une équation 1D non locale.⁶

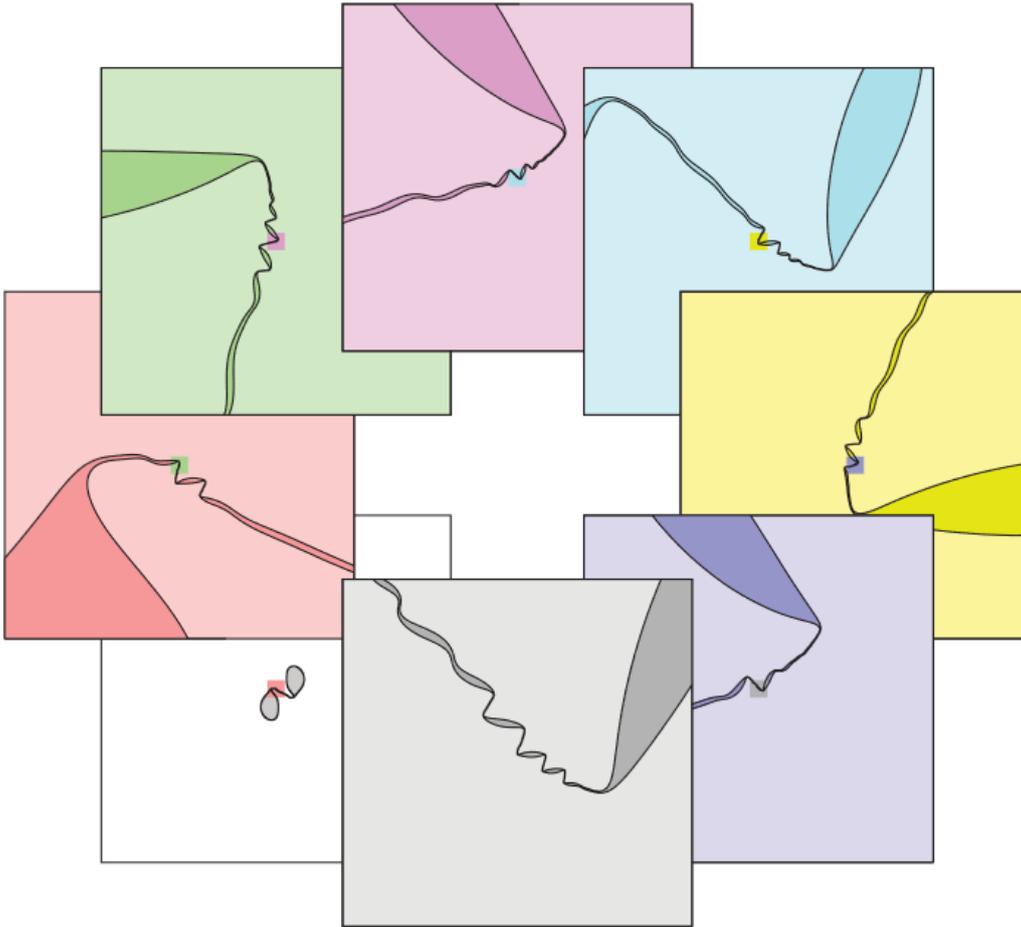


Figure 5: Évolution du patch elliptique (en foncé, le fond vaut $\theta = 0$). Un filament se forme et déclenche une cascade d'instabilité en chaîne. Figure 3 de [31].

Ainsi, l'étude de la régularité pour ce système équivaut à la formation en temps fini d'une discontinuité de la dérivée de l'interface du patch. Cela peut arriver par l'apparition d'un *coin* de courbure infini ou par le rapprochement (pincement), jusqu'à une distance nulle, de la distance entre deux éléments du contour initialement séparés. Le coin est de moindre intérêt parce qu'il n'existe pas d'équivalent pour des configurations continues du champ de température (en lissant le patch de θ), qui est le cas d'intérêt physique.

Pour le pincement, Scott et Dritschel [31] ont alors montré numériquement qu'un patch initialement elliptique peut donner naissance à un filament allongé.

⁶L'existence locale de solutions lisses de l'interface a été montrée par Rodrigo [29] et Gancedo [30].

Or Jukes [32] (voir Annexe A) a montré qu'un tel filament, d'épaisseur δ_0 , est associé à une instabilité de taux de croissance $\propto \delta_0^{-1}$ pour un mode principal $\propto \delta_0^{-1}$, cf. figure 5. De plus, l'instabilité conduit alors à des vortex ellipsoïdes secondaires liés entre eux par de nouveaux filaments de taille $\delta_1 \approx \delta_0/40$. Une nouvelle instabilité peut alors croître sur ces filaments "fils" et conduire à une nouvelle génération de filament et ainsi de suite. Cela va conduire à une cascade auto-similaire d'instabilité dont le temps de croissance est intégrable et ainsi, l'apparition d'une singularité de l'interface en temps fini telle que la courbure de l'interface du patch diverge.

Enfin, Scott et Dritschel conjecturent l'existence du même phénomène pour les solutions fortes de SQG à partir de conditions initiales lisses en quasi-patchs régularisés [33]. **C'est donc une piste numérique d'apparition de singularités en temps fini à partir d'une condition initiale lisse.**

D'un point de vue dynamique, le filament correspond à un écoulement en cisaillement, et l'instabilité de Jukes à celle de **Kelvin-Helmoltz** pour les équations d'Euler / Navier Stokes. En revanche, l'instabilité filament SQG possède une longueur caractéristique de régularisation : l'épaisseur du filament δ , qui n'existe pas dans Kelvin-Helmoltz. Ainsi, si le patch en forme de filament est régularisé par de la viscosité ν par exemple (qui lisse les bords du patch), et que l'on fait ensuite tendre cette viscosité vers 0, on retrouvera le filament discontinu et il existera toujours une longueur minimale de coupure, proportionnelle à δ telle que la perturbation sera re-stabilisée. Pour les équations de Navier-Stokes, le cisaillement correspond à une distribution en Dirac de la vorticité ($\omega_z = \vec{\nabla} \times \vec{u} \cdot \vec{e}_z = \delta(x)$) et donc est "d'épaisseur nulle". Ainsi, dans la limite $\nu \rightarrow 0$ après régularisation, toutes les perturbations possibles seront dangereuses / instables (voir [10]).

2.2.3 SQG dissipatives

Pour $\nu > 0$ les mêmes questions d'existence, unicité et régularité que pour le cas invicidé se posent. De plus, il s'agit de savoir si, dans la limite $\nu \rightarrow 0^+$, les solutions dissipatives tendent vers une unique ou non solution du problème invicidé.

Existence et unicité

Pour les équations SQG **sub-critiques**, i.e. avec $p > 1/2$, le terme dissipatif $\nu(-\Delta)^p \theta$ contrôle le terme non linéaire $u \nabla \theta$ aux petites échelles. Ainsi, Constantin et Wu [34] ont démontré l'existence et l'unicité globale des solutions fortes dans ce cas. L'unicité des solutions faibles n'est pas garantie dans les espaces de fonctions qui ne sont pas suffisamment réguliers (Buckmaster et al., [18]). Le même type de résultat existe pour les équations de Navier Stokes avec hyper viscosité lorsque le terme dissipatif est $\nu(-\Delta)^{p_{NS}} u$ avec $p_{NS} > 1$.

En revanche, comme pour le cas SQG invicidé, le problème dissipatif **sur-critique** ($\alpha < 1/2$) reste ouvert. Il existe également dans ce cas des résultats équivalents aux propriétés 1.1 et 1.2 quant à l'existence et l'unicité locale des solutions, et l'existence globale de solutions faibles, sans en garantir l'unicité.

La principale différence entre SQG et les équations d'Euler et de Navier-Stokes 3D porte sur le cas critique, respectivement $p = 1/2$ et $p_{NS} = 1$. Dans ce cas, Kiselev, Nazarov, et Volberg [35] prouvent que, pour les équations SQG critiques, à partir d'une condition initiale lisse (problème de Cauchy), il existe une unique solution pour tout $t > 0$. Dans le cas SQG critique et for  $f \neq 0$, Constantin et Vicol montrent de plus que la dynamique aux temps longs possède un attracteur global et compact, associé à une dimension de Hausdorff finie (nombre d'échelles spatiales différentes mises en jeu). Ainsi, sur le Tore, $p = 1/2$ suffit à contrôler le terme

non linéaire. Pour $p_{NS} = 1$, dans le cas **des équations de Navier Stokes**, un tel résultat n'est pas connu et constitue une des principales questions toujours actuelle en mathématiques.

Convergence vers le problème invicidé ?

Dans la limite $\nu \rightarrow 0$ et pour les cas critique et sub-critique, i.e. $p \in [1/2, \infty[$, Wu [36] et Bersilli [37] ont démontré différents théorèmes de convergence des solutions visqueuses θ_ν vers la solution du problème invicidé.

Propriété 2 (*Convergence lisse*).

si $\theta(x, 0) \in H^m$ avec $m \geq 3$ entier, et pour $t < T_*$ (temps maximal d'existence défini dans le théorème 1), alors

$$\|\theta_\nu - \theta(t)\|_{L^2} \leq C\nu$$

avec C une constante qui dépend de t et $\theta(x, 0)$ mais pas de ν .

Remarque : Ces résultats tiennent localement en temps, sur le domaine où la solution du problème invicidé reste régulière et unique. Cela ne nous donne pas d'information de convergence du problème régularisé (visqueux) vers une solution faible du problème invicidé dans le cas général où les solutions peuvent être irrégulières, et donc non uniques, comme cela est vraisemblablement le cas d'après les observations turbulentes.

2.3 La turbulence SQG

Dans les problèmes hydrodynamiques, la dynamique turbulente ($0 < \nu \ll 1$) visqueuse est fortement influencée par les symétries des équations invicidées et les quantités conservées associées.

2.3.1 Les quantités conservées : double cascade

Les équations SQG invicidées décrivent le transport, par un écoulement incompressible, de la température de surface. Ainsi, tant que la solution reste lisse, pour toute fonction G la quantité:

$$\int_{x \in \mathcal{D}} G(\theta) dx$$

est conservée. En particulier, la variance scalaire, ou **énergie de surface** se conserve:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \theta^2 dx = cte \quad (2.6)$$

De plus, à partir de la formule de Plancherel et de la relation spectrale entre u et θ (eq. 2.3), il vient:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \theta^2 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} |u|^2 dx > 0 \quad (2.7)$$

Ainsi, l'énergie cinétique de surface est aussi conservée, comme l'énergie cinétique totale pour les équations d'Euler 3D.

De plus, comme déjà mentionné dans la section 2.2, le *Hamiltonien* \mathcal{H} est aussi une intégrale première de la dynamique lisse, **de signe constant**.

$$\mathcal{H} = \langle \lambda^{-1} \theta, \theta \rangle = \mathcal{H}(0) > 0 \quad (2.8)$$

Il n'a pas d'analogue de \mathcal{H} pour Euler 3D [11]. Cependant, si on fait l'analogie avec les équations d'Euler 2D [18], \mathcal{H} est l'équivalent de l'énergie et \mathcal{E} de l'enstrophie.

Enfin, comme déjà évoqué, Constantin et al. [11] présentent un autre invariant de la dynamique :

$$\int_{\{x|C_1 \leq \theta(x,t) \leq C_2\}} \kappa |\nabla^\perp \theta| dx$$

où $\kappa = (\xi \cdot \nabla \xi) \cdot \xi^\perp$ avec $\xi = \frac{\nabla^\perp \theta}{|\nabla^\perp \theta|}$ est la courbure d'une ligne de niveau de θ et l'intégrale porte sur un ensemble fermé de valeur de θ .

Cette constante est la *somme* des nombres de rotation (enroulement de la courbe sur elle même) de toutes les lignes de niveau de θ comprises dans l'ensemble. **C'est un invariant topologique des courbes de niveaux**, dont on pourrait éventuellement faire l'analogie à l'hélicité dans les équations 3D. Par ailleurs, comme pour l'hélicité, **cet invariant n'est pas signé**, i.e n'est pas forcément positif comme le sont l'Hamiltonien ou l'énergie de surface. Son lien avec la dynamique turbulente n'est donc pas claire et, à notre connaissance, n'a jamais été étudié.

Ainsi, Blumen [15] a montré que, dû à l'existence de deux invariants signés, \mathcal{E} et \mathcal{H} , deux régimes turbulents peuvent être identifiés comme dans la phénoménologie Kraichnan pour Navier-Stokes 2D:

1. **une cascade inverse de l'Hamiltonien**, i.e. lorsque de l'Hamiltonien est injecté dans l'écoulement à une échelle caractéristique l_i petite devant la taille totale du domaine $L_{\mathcal{D}}$, ce dernier va "remonter" de proche en proche entre les échelles afin de former des structures de plus en plus grandes jusqu'à atteindre $L_{\mathcal{D}}$;
2. **une cascade directe de l'énergie de surface**, i.e. l'énergie injectée à l_i va conduire à la formation de tourbillons de tailles inférieures et ainsi de suite jusqu'à ce que les structures aient des tailles suffisamment petites pour ressentir l'effet de la viscosité et ainsi dissiper de l'énergie.

La figure 6 (a) ci-dessous présente schématiquement le principe de la cascade turbulente directe, tandis que la figure 6 (b) illustre la phénoménologie de la double cascade dans les équations fluides.

Cette dualité a été confirmée à partir de simulations numériques utilisant des équations modèles (EDQNM) puis chacune des cascades ont été étudiées séparément en résolvant numériquement directement le système SQG. Dans le reste de notre étude, l'énergie est directement injectée à l'échelle du domaine, i.e. $l_i = L_{\mathcal{D}}$, et nous nous concentrons alors uniquement sur la cascade directe, i.e. au transfert de l'énergie des grandes aux petites échelles.

2.3.2 Cascade directe : K41 SQG

En 1842 Joule va concevoir un dispositif extraordinairement simple dans son principe. On fait tomber un poids attaché à un fil. En se déroulant le fil entraîne des pales en rotation dans un récipient d'eau (isolé). Les pales ont une longueur moyenne l_i et le récipient est hermétique. Quand le poids atteint le sol, l'énergie mécanique qu'il avait fallu pour le soulever a été convertie en énergie cinétique de rotation de l'eau, dans un mouvement de taille caractéristique l_i . Ensuite, quand l'eau s'arrêtera de tourner, sa température aura (un tout petit peu) augmenté.

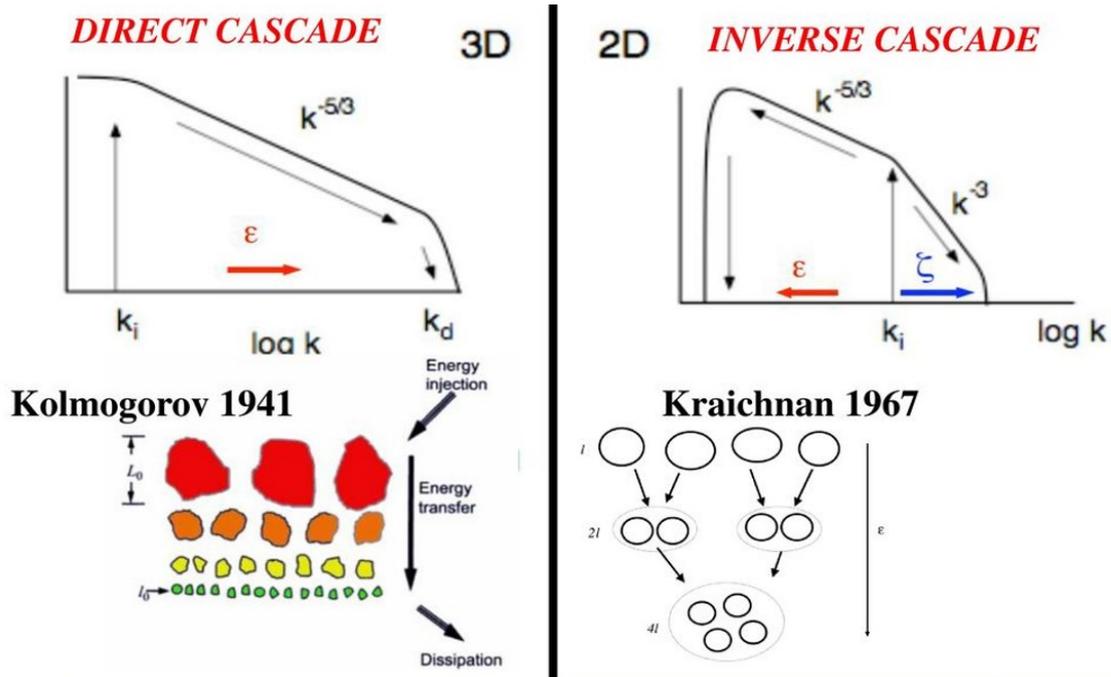


Figure 6: A gauche, Schéma de la cascade directe. L'énergie est injectée aux grandes échelles et permet la création de structures de plus en plus petites, jusqu'à atteindre l'échelle de dissipation visqueuse. A droite, spectre de l'énergie d'une solution des équations de Navier Stokes 2D : Cascade inverse. L'énergie est injectée à des échelles intermédiaires. L'énergie remonte aux grandes échelles tandis que la vorticité descend vers les petites échelles. Image issue de [38].

C'est une parfaite illustration du premier principe de la thermodynamique. Pourtant il y a un problème, la viscosité de l'eau est trop faible pour agir à ces échelles macroscopiques l_i . Comment l'énergie mécanique ordonnée a-t-elle été convertie en énergie microscopique désordonnée ?

Une partie de la réponse, proposée pour la première fois par le météorologiste anglais Richardson en 1922, peut s'expliquer à partir de la cascade directe dans les fluides. Décrite ensuite en 1941 par Kolmogorov, l'idée est que les écoulements turbulents ont une structure auto-similaire, telle que, de manière imagée, les grands tourbillons en créent de tailles réduits qui vont à leur tour en former des nouveaux de tailles encore plus petites et ce, jusqu'à atteindre l'échelle, dite de Kolmogorov η , où la viscosité est suffisamment forte pour dissiper l'énergie et la convertir en chaleur. Ainsi, la cascade de Kolmogorov-Richardson permet de comprendre comment la turbulence permet aux fluides de transformer l'énergie mécanique des grandes échelles en chaleur.

Dans la suite de cette sous partie, nous allons présenter certaines des propriétés statistiques de la cascade directe SQG afin d'en comprendre les propriétés et potentielles similitudes avec les équations de Navier-Stokes.

Pour cela, nous avons effectué des simulations numériques directes des équations SQG dissipatives ($p = 1$) forcées. L'énergie est injectée aux grandes échelles, $|k_L| < 2$ sous la forme d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck tel que :

$$\frac{d\hat{\theta}(k_L)}{dt} = -\frac{1}{\tau}\theta(\hat{k}_L) + \sqrt{2f_0}\eta(t) + SQG \tag{2.9}$$

où $\tau = 10$ est le temps de corrélation du forçage, nécessaire pour limiter l'accumulation et le blocage de l'énergie aux grandes échelles. $f_0 = 0.5$ est l'amplitude moyenne de la fluctuation de l'énergie ($\propto \hat{\theta}^2$) et $\eta(t)$ est un bruit blanc. Le '+SQG' signifie que les termes venant de l'équation SQG sont aussi pris en compte pour ces modes, en plus du forçage. Ainsi, l'énergie contenue

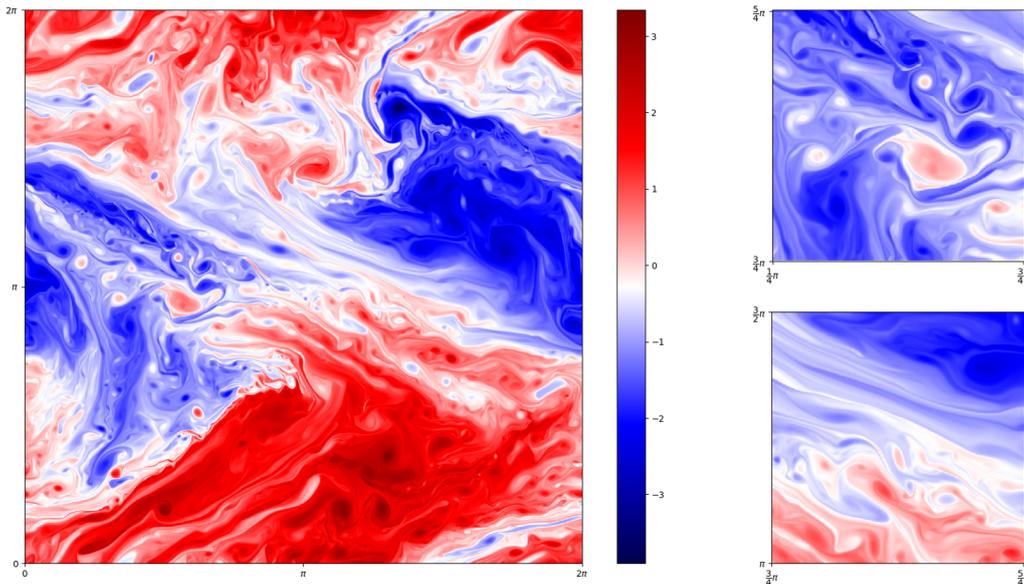


Figure 7: Simulation numérique forcée. Résolution 2048^2 et $\nu = 3.10^{-5}$. A droite, deux agrandissements (coté 1/4) de champ de gauche. Nous pouvons remarquer la multitude de structure de tailles différentes. Suivant la zone choisie nous remarquons la présence prépondérantes de filaments ou de tourbillons.

dans le domaine fluctue autour de $\mathcal{E} \approx 1$ et $\tau_r \approx 2\pi$ est le temps caractéristique associé aux grands tourbillons. Ces équations sont résolues pour différentes valeurs de la viscosité s'étendant sur 2 décades, $\nu \in [3 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-5}]$, à l'aide d'un code pseudo-spectral implémenté par Jérémie Bec.

Anomalie Dissipative :

Tout d'abord, il est important de signaler que dans la phénoménologie de la cascade turbulente décrite plus haut, nommée après Kolmogorov 41, le taux de dissipation de l'énergie,

$$\epsilon_\theta(t) = -\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \nu \int_{\mathcal{D}} |\nabla\theta|^2 dx = \nu \langle |\nabla\theta|^2 \rangle_x$$

ne doit pas dépendre de la valeur de la viscosité. En effet, le mécanisme de production de plus petits tourbillons va, de proche en proche, produire des structures suffisamment petites pour que l'énergie injectée soit dissipée à cette échelle η . Ainsi, la valeur de la dissipation est ici prescrite par le flux d'énergie transmis par les grandes échelles. La valeur de la viscosité quand à elle détermine la "taille de la cascade", i.e. le nombre d'échelles dans lequel le mécanisme auto-similaire s'applique. Ces dernières sont appelées "échelles inertielles".

La figure 8 présente la valeur moyenne de la dissipation de l'énergie de surface, sur plus de 10 temps de retournement des grandes échelles en fonction des différentes viscosités simulées (l'axe horizontal est retourné). **Nous observons alors que la dissipation semble converger vers une valeur non nulle**, i.e. $\lim_{\nu \rightarrow 0} \epsilon_\theta = cste > 0$. Ainsi,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \mathcal{E}^\nu \neq \mathcal{E}^\nu(0) \quad (2.10)$$

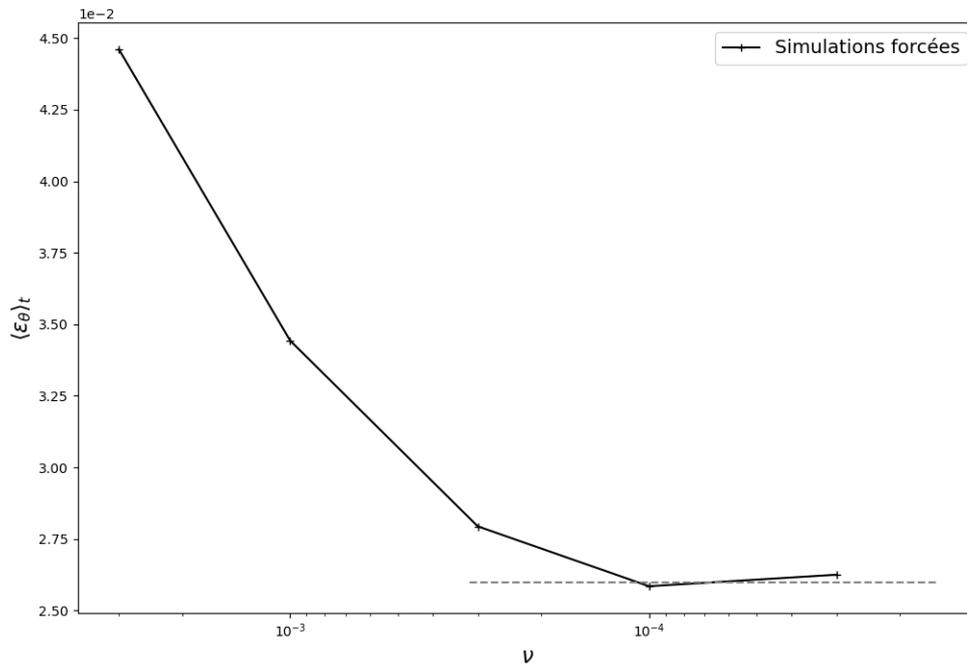


Figure 8: Évolution de la dissipation de l'énergie de surface en fonction de la viscosité. L'axe horizontal est inversé.

La conservation de l'énergie (et donc la symétrie par retournement du temps) semble brisée dans la limite turbulente. C'est l'**anomalie dissipative**.

De plus, à partir de la définition de $\epsilon_\theta = \nu \langle |\nabla \theta| \rangle_x$, il est clair que $\lim_{\nu \rightarrow 0} |\nabla \theta| = \infty$. Ainsi, l'écoulement devient de plus en plus irrégulier dans la limite turbulente et les singularités (ou pseudo singularités tant que $\nu > 0$) vont dissiper l'énergie. Le lien entre structures singulières et dissipation dans les équations d'Euler ($\nu = 0$) a été introduit par Onsager. De part l'homogénéité entre θ et \vec{u} et la non-linéarité quadratique des équations SQG, nous pouvons convertir la conjecture d'Onsager pour SQG :

Conjecture 1 (*Conjecture d'Onsager*). Soit $\theta \in \mathcal{C}^\gamma$ une solution faible des équations SQG invicidas, alors :

1. $\gamma > 1/3 \Rightarrow \forall t, \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$
2. $\gamma \leq 1/3 \Rightarrow \mathcal{E}(t) < \mathcal{E}(0)$

Cette conjecture a été démontrée avec le système SQG pour le côté régulier (1) (voir par exemple [39]) tandis que pour la partie dissipative, le problème reste ouverte proche du coefficient critique, ici $\frac{1}{3}$.

Spectres de l'énergie de surface SQG :

En turbulence isotrope homogène, le spectre 1D $G(k)$ d'une grandeur macroscopique \mathcal{G} correspond à l'énergie de \mathcal{G} contenue par les structures associées à des échelles de taille $\frac{2\pi}{k}$, où k est un le nombre d'onde. Ainsi, $\mathcal{G} = \int_k G(k)dk$.

Aussi, nous définissons $E(k)$, le spectre de l'énergie de surface \mathcal{E} et, en supposant l'existence de la cascade directe, l'analyse dimensionnelle conduit à une répartition d'énergie spectrale dans les échelles inertielles telle que:

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad (2.11)$$

C'est la même loi d'échelle que dans les équations de Navier Stokes 3D. De plus, la pente en $-5/3$ est caractéristique d'une irrégularité des champs de vitesse et température telle que $\theta \in C^1/3$ et donc cohérent avec l'anomalie dissipative observée d'après la conjecture d'Onsager.

Dans la littérature, suivant le type de forçage, la dissipation aux grandes échelles, et la méthode de résolution, les auteurs présentent des pentes soit légèrement inférieures [40] soit significativement supérieures [41][42] à $-5/3$. La figure 9 ci-dessous présente le spectre d'énergie de surface pour la simulation la plus résolue réalisée, i.e. $\nu = 3 \times 10^{-5}$. Ce dernier est moyenné sur plus de 10 temps de retournement. Nous observons alors effectivement une pente en $-5/3$ sur une plage de valeur d'environ d'une décade. En revanche, la pente s'infléchit bien avant l'échelle de Kolmogorov où la dissipation est prépondérante. Il semble être possible d'identifier un intervalle où la pente est -2 . Cette dernière est caractéristique des structures en front linéaire comme les filaments qui semblent présents à toutes les échelles et participent à la création des tourbillons, voir figure 7 et [16]. Quoi qu'il en soit, le spectre est moins pentu que k^{-3} qui correspond à une solution lisse et la répartition d'énergie permet aux petites échelles d'être énergétiques et au champ de température de comporter des structures d'une large gamme d'échelles différentes (cf. figure 7).

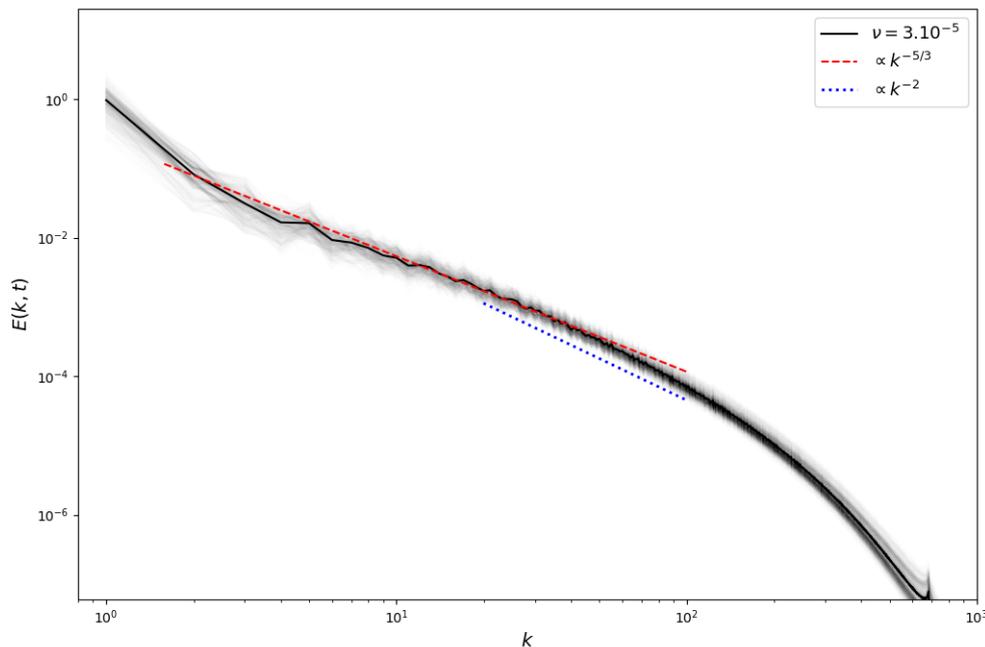


Figure 9: Spectre de l'énergie de surface pour $\nu = 3 \times 10^{-5}$.

Transfert de l'énergie de surface SQG :

Enfin, l'équation de conservation de l'énergie dans le domaine de Fourier s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d|\hat{\theta}|^2(k)}{dt} = -\mathcal{R}e \left[\hat{\theta}(k)(u \cdot \hat{\nabla} \theta) \right] - \nu k^2 \hat{\theta}(k) \quad (2.12)$$

Dans la gamme d'échelle inertielle, le terme de dissipation visqueux peut être négligé. Ainsi, on définit $\pi_\theta(k) = -\int_k^\infty \langle \mathcal{R}e \left[\hat{\theta}(k)(u \cdot \hat{\nabla} \theta) \right] \rangle dk$. π_θ est le flux spectral, local d'énergie de surface. Cela représente la quantité d'énergie de surface \mathcal{E} qui passe à travers le mode k dans le sens croissant chaque seconde. Ainsi, $\pi_\theta > 0$ correspond à un transfert d'énergie des grandes vers les petites échelles, tandis que $\pi_\theta < 0$ correspondrait à une "remontée" de l'énergie formant de plus grandes structures.

La figure 10 présente le flux d'énergie spectrale pour les simulations SQG forcées effectuées pour différentes valeurs de la viscosité. Dans chacune des simulations, il existe une plage de valeur où π_θ est constant et positif, ce qui est cohérent avec la présence d'une cascade directe. La valeur limite est $\pi_\theta = 2\epsilon$. Le 2 vient de l'équation de Karman-Howarth-Monin pour SQG (voir Annexe B). Ce résultat conforte l'idée d'une cascade dont les statistiques et phénomènes turbulents sont invariant par changement d'échelle.

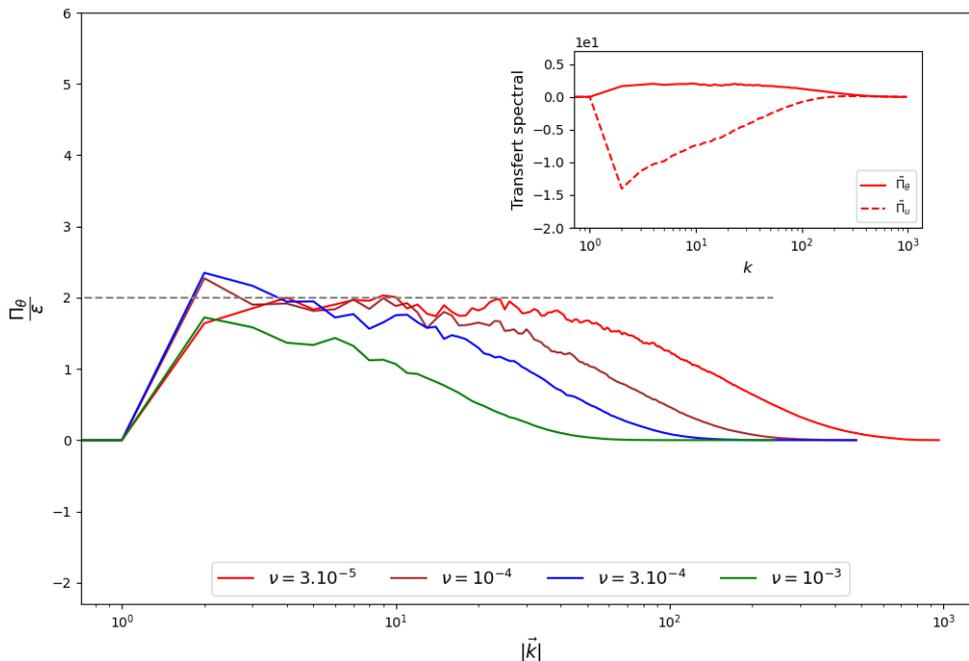


Figure 10: Flux spectral local de l'énergie de surface pour différentes valeurs de la viscosité. Nous observons un plateau, qui tendrait vers l'infini, $k_\epsilon t a \rightarrow \infty$ pour $\nu \rightarrow 0$ caractéristique de la cascade directe. Insert : flux d'énergie de surface spectral π_θ et "pseudo-flux" π_u du champs de vitesse. Bien que u et θ est le même spectre, ces deux termes sont fondamentalement différent [43]

Remarque : L'équation pour u (obtenue à partir de l'équation de θ en inversant la transformée de Riesz) est

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \vec{k} \times \vec{u}_{ag} = 0$$

avec \vec{k} le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface. Ainsi, il y a un terme supplémentaire (qui vient physiquement de la vitesse agéostrophique, elle même définie à partir de θ et u). Or, θ et u ayant le même spectre, les statistiques de $[u \cdot \nabla \theta]$ et $[u \cdot \nabla u + \vec{k} \times \vec{u}_{ag}]$ sont identiques. En revanche le terme uniquement composé de u n'est pas forcément égale aux statistiques de l'équation pour θ . Afin de mettre cela en évidence, l'insert de la figure 10 représente les flux π_θ et $\pi_u = -\int_k^\infty \langle \mathcal{R}e[\hat{u}(k)(u \cdot \hat{\nabla} u)] \rangle dk$. Nous pouvons effectivement voir que π_θ a un flux positif représentatif de la cascade directe, alors que π_u est négatif et représenterait au contraire la remonté de l'énergie des petites vers les grandes échelles, comme pour le champ de vitesse de Navier Stokes 2D. Le terme agéostrophique est celui qui induit un comportement proche de la 3D dans les équations SQG.

2.3.3 Cascade directe : Intermittence et K62 SQG

Intermittence dans les simulations SQG forcées :

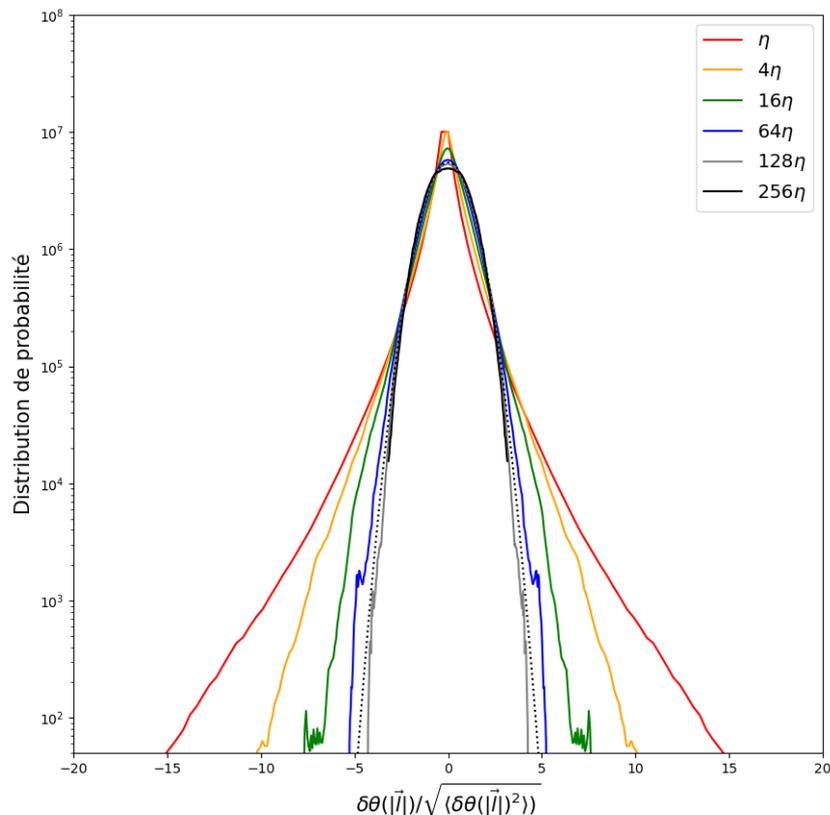


Figure 11: Incrément de température renormalisé $\delta_l \theta = \theta(\vec{x} + \vec{l}) - \theta(\vec{x})$ pour différentes valeurs de la séparation $|\vec{l}|$. Pour les grandes valeurs de $|\vec{l}|$, la distribution est proche d'une gaussienne (théorème centrale limite), tandis que pour les petites échelles, les queues de distribution sont plus étalées.

Dans la phénoménologie de la théorie de Kolmogorov 1941, l'écoulement est supposé auto-similaire et possède une invariance d'échelle. Par exemple, nous considérons entre autre que la dissipation de l'énergie est répartie de manière homogène en espace et uniforme selon l'échelle à

laquelle l'écoulement est observé.

Pourtant, les distributions de probabilité de l'incrément de température, $\delta_l \theta = \theta(\vec{x} + \vec{l}) - \theta(\vec{x})$, pour différentes longueurs l montrent bien une dépendance forte des statistiques à l'échelle considérée, même dans la zone inertielle (de η à 128η), cf. figure 11. En effet, les queues de distribution pour les échelles inertielles et dissipatives sont plus étalées que pour les grandes échelles qui sont proches d'une distribution gaussienne.

De plus, la figure 12 présente le champ de dissipation de l'énergie de surface $\epsilon(\vec{x}) = \nu(\nabla\theta)^2(\vec{x})$ à un instant t pour la simulation avec la plus grande résolution. Ainsi, nous observons que le champ de dissipation, tracé en échelle logarithmique, connaît des zones de forte dissipation (blanches), tandis que dans d'autres, plus sombres, il n'y a pas d'événement violent ni tourbillon à cette échelle et à cet endroit. De plus, dans les deux champs agrandis de gauche, on voit que deux types de structure très différentes, toutes les deux fortement dissipatives, montrant que, en plus de la non homogénéité, plusieurs types de structure singulières différentes coexistent.

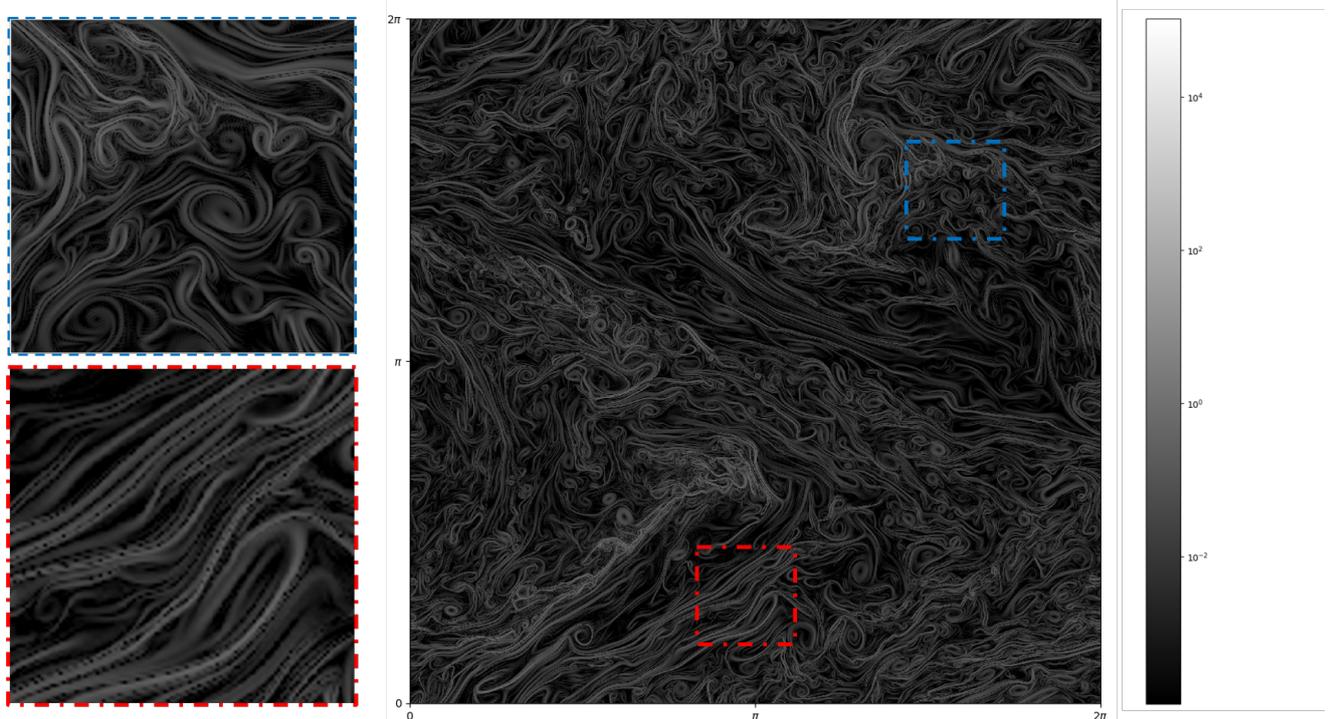


Figure 12: Champs de dissipation $\epsilon(\vec{x}) = \nu(\nabla\theta)^2(\vec{x})$ pour la simulation avec la plus grande résolution. On remarque sur la figure de droite qu'il y a des zones de forte dissipation et d'autres plus sombre. De plus, les agrandissements de gauche, montrent deux zones fortement dissipatives associées à des structures turbulentes très clairement différentes.

Cela est représenté schématiquement dans la figure 13 qui compare la phénoménologie de Kolmogorov 1941 avec une autre image de la cascade directe, dite intermittente (ici "mono fractal"). Ainsi, on voit bien que la dissipation ϵ , jusqu'alors considérée constante dans la zone inertielle, est aussi une variable aléatoire, dont les statistiques dépendent de l'échelle considérée. Ainsi, d'après nos observations **le champ turbulent SQG, comme celui dans Navier-Stokes 3D, est intermittent dans la cascade directe.**

En 1962, Kolmogorov et Obukhov [44] ont proposé un modèle, phénoménologique, pour compléter la vision de la cascade de Kolmogorov 41. C'est le **modèle Log-Normal**.

L'idée sous-jacente est de considérer une **cascade multiplicative** discrète. Plus spécifiquement, la cascade de tourbillons turbulents peut être vue comme un ensemble de cellules, chacune

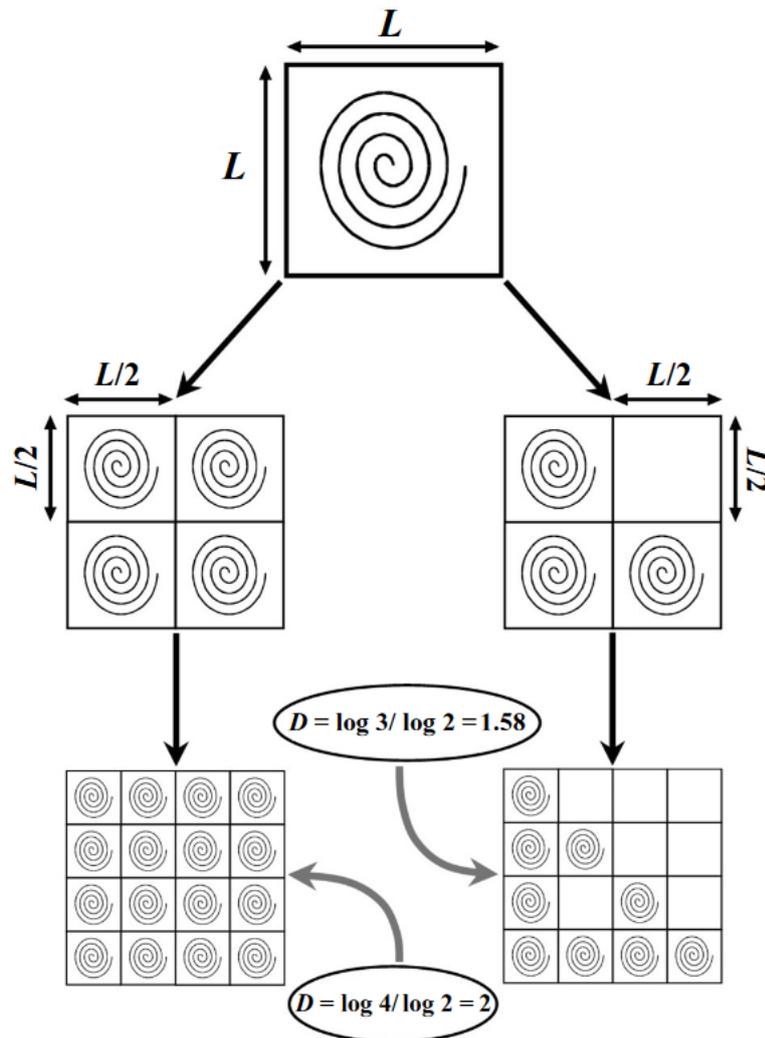


Figure 13: Schéma de la cascade directe discrète. A gauche, cascade 'à la Kolmogorov 41', la dissipation d'énergie local vaut à la dissipation moyenne de l'énergie qui est homogène (en espace et en échelle). A droite, la dissipation est distribuée comme une variable aléatoire entre les différentes échelles successives. La dissipation n'est alors plus statistiquement homogène entre les échelles.

associée à une variable aléatoire. Toutes ces variables aléatoires sont supposées indépendantes et positives et suivent la même loi statistique. La plus grande cellule est unique et associée à la taille du domaine $L_{\mathcal{D}}$. Elle est ensuite divisée en λ^2 cellules de taille $L_{\mathcal{D}}/\lambda$. Ce processus est itéré (voir figure 13) et, à l'étape m , chacune des λ^{2m} cellules a une taille de $L_{\mathcal{D}}/\lambda^m$ et ce jusqu'à l'échelle dissipative $\eta = L_{\mathcal{D}}/\lambda^n$ ($m < n$). La dissipation associée à l'échelle λ^j s'écrit alors comme le produit de n variable aléatoire indépendante tel que

$$\epsilon_{\lambda^j} = \langle \epsilon \rangle \prod_{i=1}^j X_i \quad (2.13)$$

où $X_i = \epsilon_{\lambda^{i+1}}/\epsilon_{\lambda^i}$ est positive et associé à la couche i de la cascade de moyenne 1 et $\langle \epsilon \rangle = \epsilon_{L_{\mathcal{D}}}$ est la valeur moyenne totale de la dissipation de l'énergie de surface.

Ainsi, en prenant le logarithme de la relation précédente, il vient :

$$\epsilon_{\lambda^j} = \log(\langle \epsilon \rangle) + \sum_{i=1}^j \log(X_i)$$

et, si en supposant valide le théorème centrale limite pour les variables aléatoires $Y_i = \log(X_i)$, Yaglom, Gurvich, Kolmogorov, Obukhov [44] ont proposé que :

$$\log(\epsilon_l) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \quad (2.14)$$

avec $\langle \epsilon_l \rangle = \langle \epsilon \rangle$ et $\sigma^2 = -2A - 2\mu_{K62} \ln(l/L_{\mathcal{D}})$ où A dépend de l'écoulement mais μ_{K62} est une constante universelle.

La figure 14 ci-dessous présente la distribution de probabilité centrée réduite du logarithme de la dissipation d'énergie de surface, $\nu|\nabla\theta|^2$, moyennée sur une cellule de taille l , pour différentes valeurs de L/l .

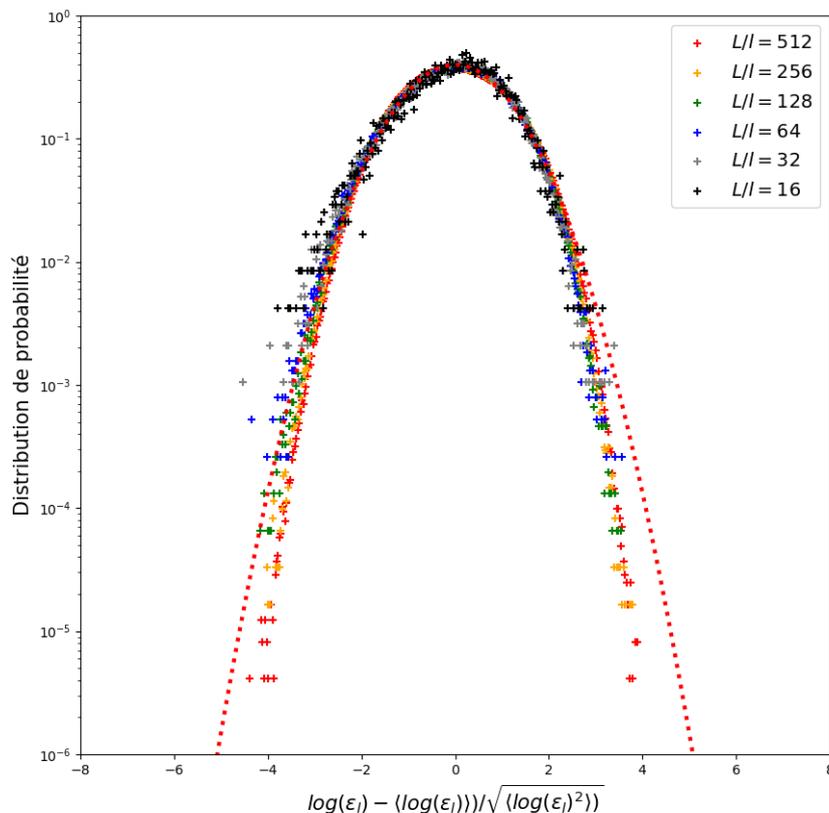


Figure 14: Densité de probabilité (échelle log) du logarithme de la dissipation centrée réduite. En pointillé rouge est tracé une gaussienne. La distribution est proche d'une loi normal pour l'ensemble des échelles allant de η à $L_{\mathcal{D}}/16$ autour de la moyenne (0). En revanche, les queues de distribution mesurées semblent sous gaussienne.

Nous voyons que la modélisation de Kolmogorov 62 correspond relativement bien à la distribution de la dissipation pour les événements classiques (proche de la moyenne) qui semblent suivre une loi log-normal pour les différentes échelles allant de 2η à $L_{\mathcal{D}}/16$. En revanche, les événements rares, associés aux queues de distribution, sont sous gaussien. La turbulence SQG, pour la simulation effectuée, semble donc légèrement moins intermittente que dans les équations de Navier Stokes

Conclusion de la partie :

Ainsi, les propriétés mathématiques d'existence, d'unicité des solutions, de leur régularité ainsi que les phénomènes turbulents à viscosité fini (et faible) des équations SQG en font un système similaire sous de nombreux aspects aux équations de Navier Stokes / Euler. Nous avons vu que l'apparition d'une singularité en temps fini est toujours un problème ouvert mais les simulations numériques laissent penser que, au moins en pratique, les solutions de SQG turbulents sont rugueuses dans la limite turbulente, $\nu \rightarrow 0$, et associées à une cascade directe d'énergie dans laquelle les structures filamenteuses ont un rôle particulier car participent à la création de tourbillons à toutes les échelles [16].

Pour les équations de Navier-Stokes en 2D, l'énergie suit une cascade inverse ce qui préserve la régularité de l'écoulement. Ce ne sont donc pas les mêmes phénomènes. Le système SQG est donc plus proche de NS-3D que ne l'est NS-2D tout en permettant des simulations numériques et des statistiques plus poussées que pour NS-3D. C'est donc un excellent candidat pour étudier des questions fondamentales de la turbulence comme la prédictibilité et la bonne définition mathématique des solutions dans la limite turbulente qui pourront, peut être, s'appliquer ensuite à NS-3D.

3 Problème de Cauchy, dissipation anormale et stochasticité spontanée lagrangienne d'un scalaire actif

Comme nous venons de le voir, l'écoulement SQG turbulent est a priori rugueux. En effet, la cascade directe permet la création de tourbillons de toutes les tailles jusqu'à l'échelle de Kolmogorov, $\eta \propto \nu^{3/4}$, qui tend vers 0 lorsque la viscosité disparaît. Dans cette limite, des non-dérivabilités du champ de vitesse vont donc vraisemblablement apparaître.

Or, la trajectoire d'une particule de fluide advectée par le fluide, initialement en x_0 est trivialement définie telle que :

$$\begin{aligned} \frac{dX_{x_0}}{dt} &= \vec{u}(X_{x_0}(t)) \\ X_{x_0}(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si le champ de vitesse est dérivable (Lipschitz), alors cette équation admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy Lipschitz. Si ce n'est pas le cas, la trajectoire peut alors ne pas être unique. **Nous ne pouvons donc plus parler de LA trajectoire que suit la particule.** À la place, il faut considérer une distribution de probabilité de trajectoires possibles. **Il y a donc une connexion forte entre l'irrégularité du champ de vitesse dans la limite turbulente et l'éventuelle bonne définition des trajectoires au sein de l'écoulement.**

Remarque : Notons que, même pour une valeur de la viscosité de plus en plus faible, tant qu'elle reste finie $\nu > 0$, les solutions SQG de θ et \vec{u} restent lisses (cf. partie II). Ainsi, chaque particule n'admet bien qu'une unique trajectoire bien définie. Néanmoins, les "presque singularités" impactent les propriétés de ces trajectoires. Par exemple, deux particules différentes initialement séparées d'une distance définie par la taille de la quasi singularité vont se séparer quasi immédiatement, comme si elles suivaient deux réalisations d'un ensemble de trajectoires aléatoires. Leur moyenne à un temps postérieur τ dépend alors des propriétés la distribution de probabilité et non pas de la distance initiale des particules !

Ce phénomène est plus fort qu'une séparation chaotique classique pour laquelle la distance $d(t)$ entre les deux particules évolue comme

$$d(t) = d(0)e^{\lambda t} \quad (\text{Séparation chaotique}) \quad (3.2)$$

avec λ l'exposant de Lyapunov de l'écoulement. En effet, une telle séparation liée à la non unicité de la trajectoire dans la limite $\nu \rightarrow 0$ conduit à

$$d(t) \propto gt^\alpha \quad (\text{Séparation non linéaire}) \quad (3.3)$$

avec α et g des constantes, indépendante de la séparation initiale $d(0)$.

Ainsi, lorsque la séparation initiale tend vers 0 (les particules tendent à être la même), pour un instant fini τ (de l'ordre de 1):

Propriété 3 (*Séparation explosive liée aux singularités*).

$$\begin{aligned} \lim_{d(0) \rightarrow 0} d(\tau) &= 0 && : \text{séparation dans un système chaotique} \\ \lim_{\nu \rightarrow 0, d(0) \rightarrow 0} d(\tau) &= g\tau^\alpha && : \text{séparation liée aux singularités de l'écoulement} \end{aligned} \quad (3.4)$$

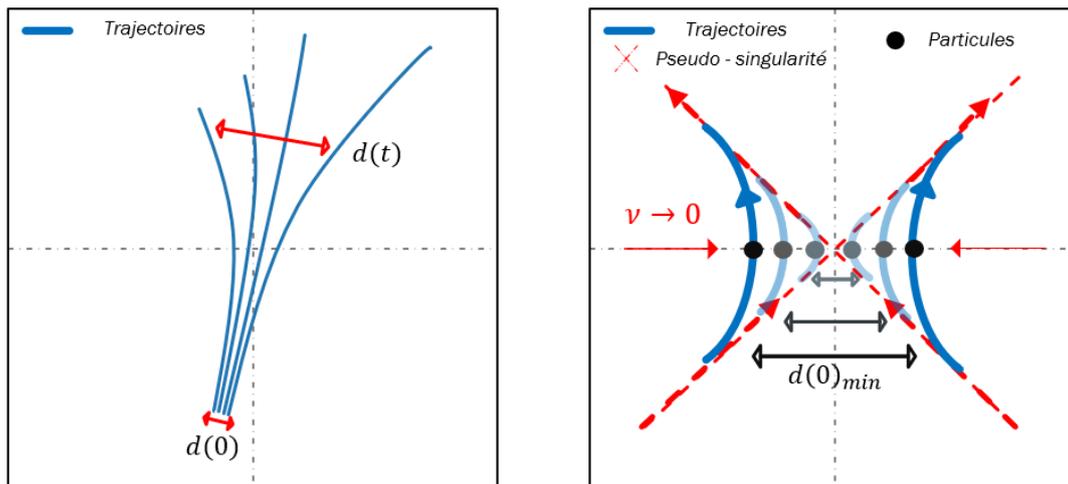


Figure 15: Gauche : séparation exponentielle des trajectoires. La séparation initiale détermine la différence à t. Droite : lorsque $\nu \rightarrow 0$, les trajectoires se rapprochent du cas singulier où elles ne sont plus définies. Ainsi, deux particules proches de plus de $d(0)_{min}$ vont connaître des trajectoires très différentes. De plus, $d(0)_{min} \rightarrow 0$ lorsque $\nu \rightarrow 0$.

Ce comportement des particules dans l'écoulement a été remarqué pour la première fois en 1926 par le météorologue britannique Richardson et est désormais connu comme la **stochasticité spontanée lagrangienne**.

Cette partie traite alors de ce phénomène. Pour cela, nous avons considéré la condition initiale proposée par Constantin, Tabak et Majda en 1994 [11]. En effet, comme expliqué dans la partie précédente, Constantin et al. supposait qu'une singularité du champ de température apparaissait en temps fini. Cependant, La régularité de ce front de température a été prouvée dans des articles ultérieurs (voir partie 2.2), tant que ce dernier reste un filament droit. En revanche, pour des viscosités très faibles, le filament créé pourrait se déstabiliser et conduire à une singularité en temps fini à travers la cascade d'instabilité de Scott et al. [31]. De plus, de

nouvelles structures potentiellement singulières apparaissent dans les simulations numériques et elles même associées des configurations instables. Cela est décrit plus en détail dans la sous partie suivante.

En tout état de cause, nous ne pouvons pas conclure sur l'apparition ou non d'une singularité dans les équations invicidales pour cette condition initiale.

Quoi qu'il en soit, pour l'ensemble des simulations réalisées pour des viscosités variant de 2 ordres de grandeur, la dissipation semble tendre vers une constante à partir du temps $t_{turb} = 27$ (indépendante de ν). De plus, dans ce régime, les statistiques de l'écoulement semblent turbulentes (spectres, transferts, intermittence), cf. partie 2.3.

Dans ce cas des résultats analytiques montrent l'équivalence entre anomalie dissipative d'un scalaire actif et la stochasticité spontanée lagrangienne (sous partie 3.3). Nous décrivons alors dans la sous partie 3.4 les statistiques lagrangiennes obtenus à partir de nos simulations numériques.

3.1 Vers le régime turbulent

Motivés par le lien entre singularités, instabilités et prédictibilité décrit dans l'étude de Thalabard et al. [10], nous avons donc choisi d'étudier dans la limite $\nu \rightarrow 0$ et dans un voisinage de t_* un écoulement dont nous savons qu'il développe une singularité à t_* dans le problème invicidale ($\nu = 0$) à partir d'une condition initiale lisse. Cela aurait été le cadre épuré pour étudier la stochasticité spontanée des champs de température et de vitesse.

Ainsi, nous avons décidé d'utiliser la condition initiale lisse proposée par Constantin et al. dans [11].:

Définition 2 (*Condition initiale de Constantin, Tabak, Majda*).

$$\theta_0(x, y) = -\cos(2x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y), \quad (3.5)$$

En effet cette condition initiale, associée à un point hyperbolique (condition nécessaire pour l'apparition d'une singularité d'après [11]), conduit à la création de fronts abrupts à $t \approx 8.5$ (voir figure 16 gauche). Cependant, ces fronts, s'ils conservent leur forme longiligne ne sont a priori pas singuliers même pour $\nu = 0$ [24] et ne croissent que comme des doubles exponentielles : $\propto e^{et}$ (voir courbe noire, à gauche, de la figure 16)). En revanche, comme l'a montré Jukes [32], cette structure fine est de plus en plus instable lorsque son épaisseur diminue. Nous pouvons alors nous demander si, dans la limite $\nu \rightarrow 0$, le filament devient ou non suffisamment fin pour se déstabiliser tout seul sous l'effet de l'écoulement (comme dans le cas du patch elliptique [31]). Cela conduirait alors potentiellement à une autre forme de singularité associée à la cascade de l'instabilité filament. Cela a été notamment observée par Scott [33] pour la condition initiale de Constantin (voir figure 17). En revanche, nous n'avons pas vu ce phénomène dans nos simulations lorsque celles-ci sont suffisamment résolues.

De plus, vers $t \approx 14.5$, nous observons un second maximum local du gradient $|\nabla\theta|$. Il s'agit de la création d'un filament triple, i.e. deux fronts chauds (resp. froids) initiaux se sont repliés sur eux mêmes en "capturant" un troisième froid (resp. chaud) entre eux. La figure 16 de droite présente les lignes de niveaux de θ à $t = 14.5$ et une coupe de la température au niveau du triple filament centrale. Nous pouvons de plus voir sur la courbes en noire en bas à droite que le gradient maximal associé à cette structure est deux fois supérieurs à celui de premier front simple. Il semblerait par ailleurs que ce mécanisme de repliement se répète plusieurs fois, mettant côte à côte des températures très différentes. Ces structures sont alors associées à d'autant plus de

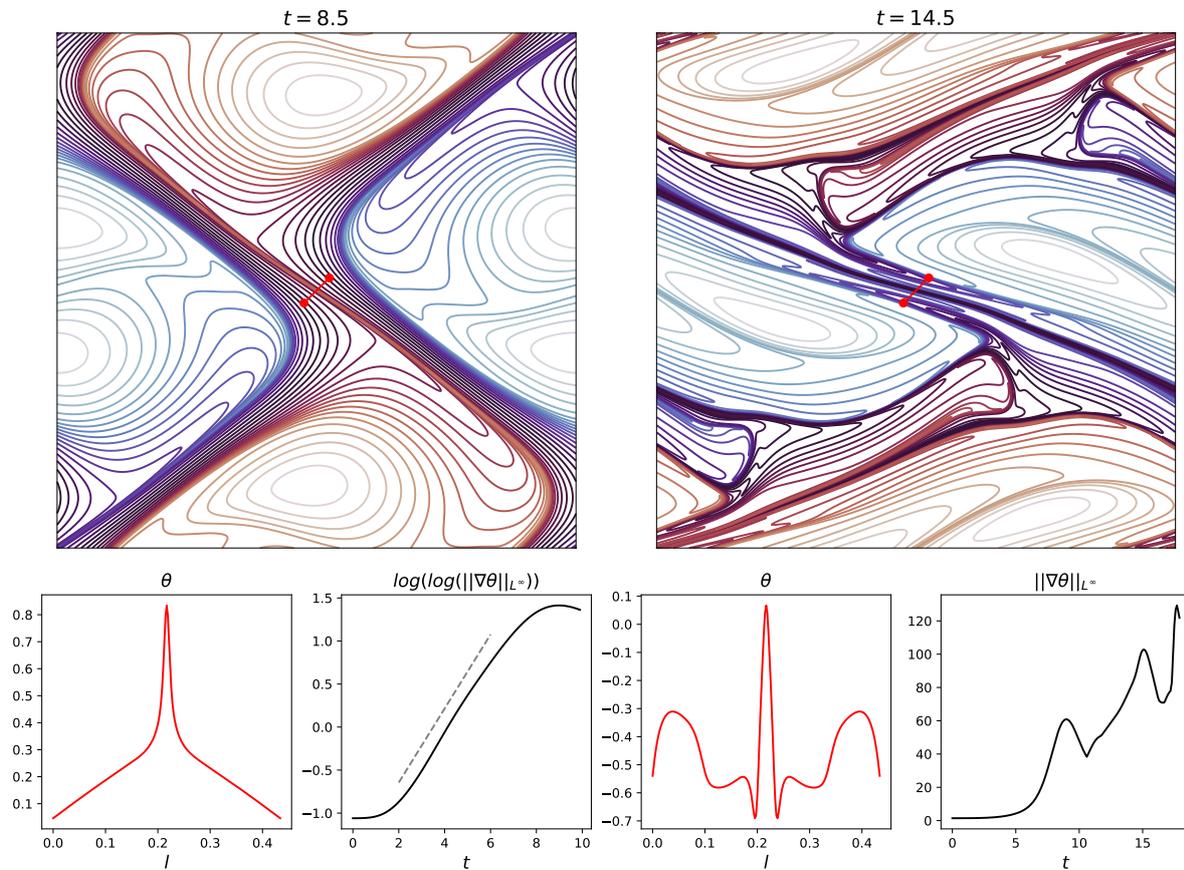


Figure 16: Simulation numérique de la CI de Constantin et al. pour une résolution de 4096^2 et $\nu = 10^{-5}$. A gauche : $t=8.5$ où le maximum du gradient de température est atteint. La figure en haut montre les lignes de niveau de θ formant le filament. En bas à gauche : une coupe du champ de température perpendiculaire au front et en bas à droite, l'évolution de $\|\nabla\theta\|_{L^\infty}$ en fonction du temps. A droite : mêmes quantités pour le second maximum local du gradient de température, $t = 14.5$. Les valeurs de θ sur les courbes de niveau vont de -1 (en bleu clair) et 1 (en rouge clair).

cisaillement de l'écoulement qu'il y a de passages abrupts d'une valeur extrême à l'autre et sont donc extrêmement instables.

Cependant, que ce soit par la formation de structure de plus en plus fine, où par l'instabilité qui leur est associée, nous ne pouvons pas conclure quant à l'apparition en temps fini de singularités dans le cas inviscide.

En revanche, nous observons que les solutions visqueuses de SQG conduisent à des écoulements multi-échelles. En effet la création puis la déstabilisation visqueuse des filaments a permis la création de tourbillons de tailles différentes à partir de $t_* = 27$. La figure 18 montre les champs de température pour $t = 15$ (maximum de la norme du gradient dans l'écoulement) et $t = 40$. L'écoulement à $t = 40$ fait effectivement intervenir des structures de toutes tailles, associée à un régime turbulent.

De plus, la gamme d'échelle différente présente dans l'écoulement à $t = 40$ est d'autant plus importante que la viscosité est faible (cf. figure 19)

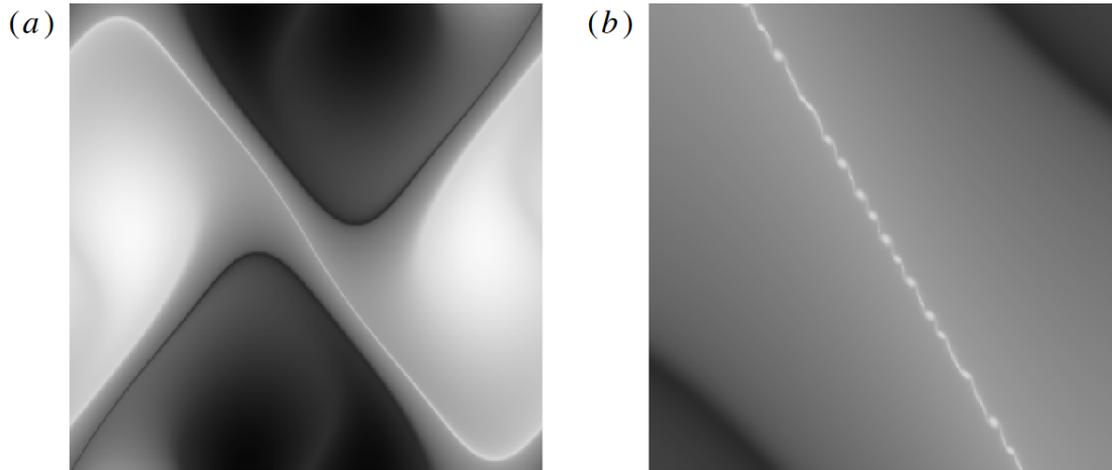


Figure 17: Image issue de [33]. Destabilisation du filament quasi-singulier principale vers $t \approx 9$

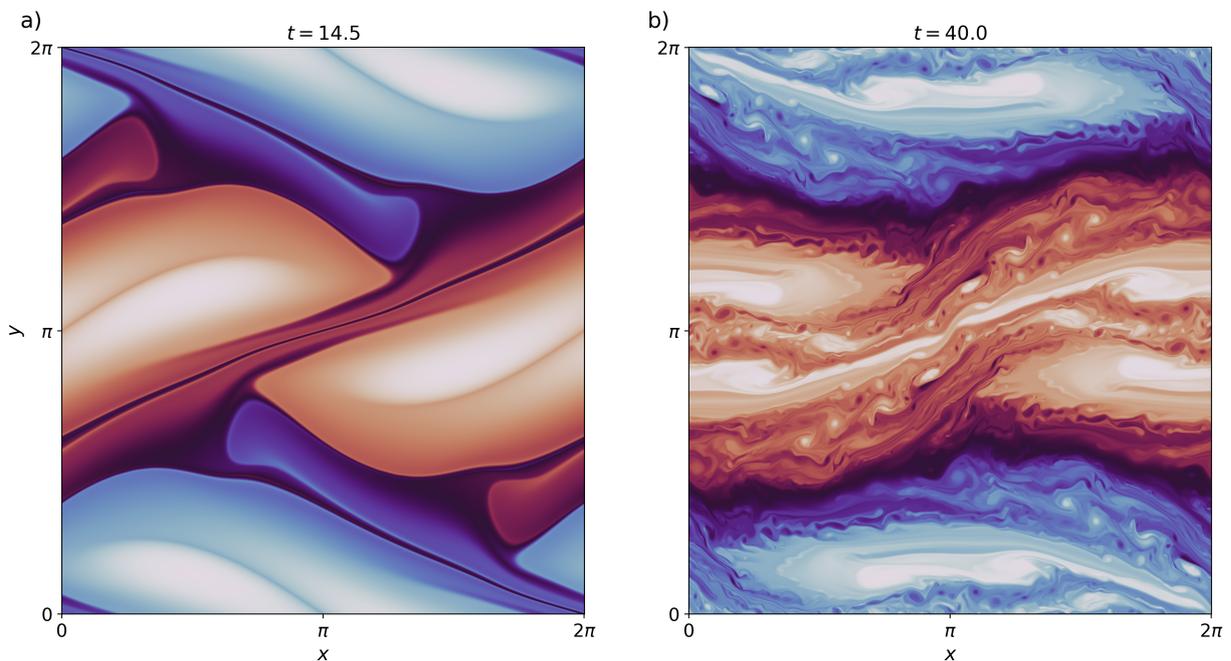


Figure 18: Champ de température à $t=15$ et $t=40$ pour $\nu = 10^{-5}$. Pour $t = 40$, l'écoulement est représentatif de la turbulence. Les valeurs de θ vont de -1 (en bleu clair) et 1 (en rouge clair).

Aussi, nous observons que les filaments semblent avoir un rôle important dans la dynamique des écoulements SQG [16]. Ils sont à l'origine de la présence des tourbillons dans les champs de température b) et d) de la figure 19. Pour le champ a), la viscosité a suffisamment lissée les structures filamenteuses pour les stabiliser, au moins jusqu'au temps 40. En revanche, dans la figure c), nous pouvons deviner le début de la création de tourbillons à partir de la compression des filaments qui présentent des points d'inflexion (que nous ne voyons pas sur le champ (a)). De plus, ce mécanisme de création de tourbillon et structure complexe à partir des filaments se retrouve à toutes les échelles de l'écoulement comme nous pouvons le voir sur la figure 20.

La solution de Constantin et al. devient donc complexe après $t_* = 27$, multi-échelle, et présente

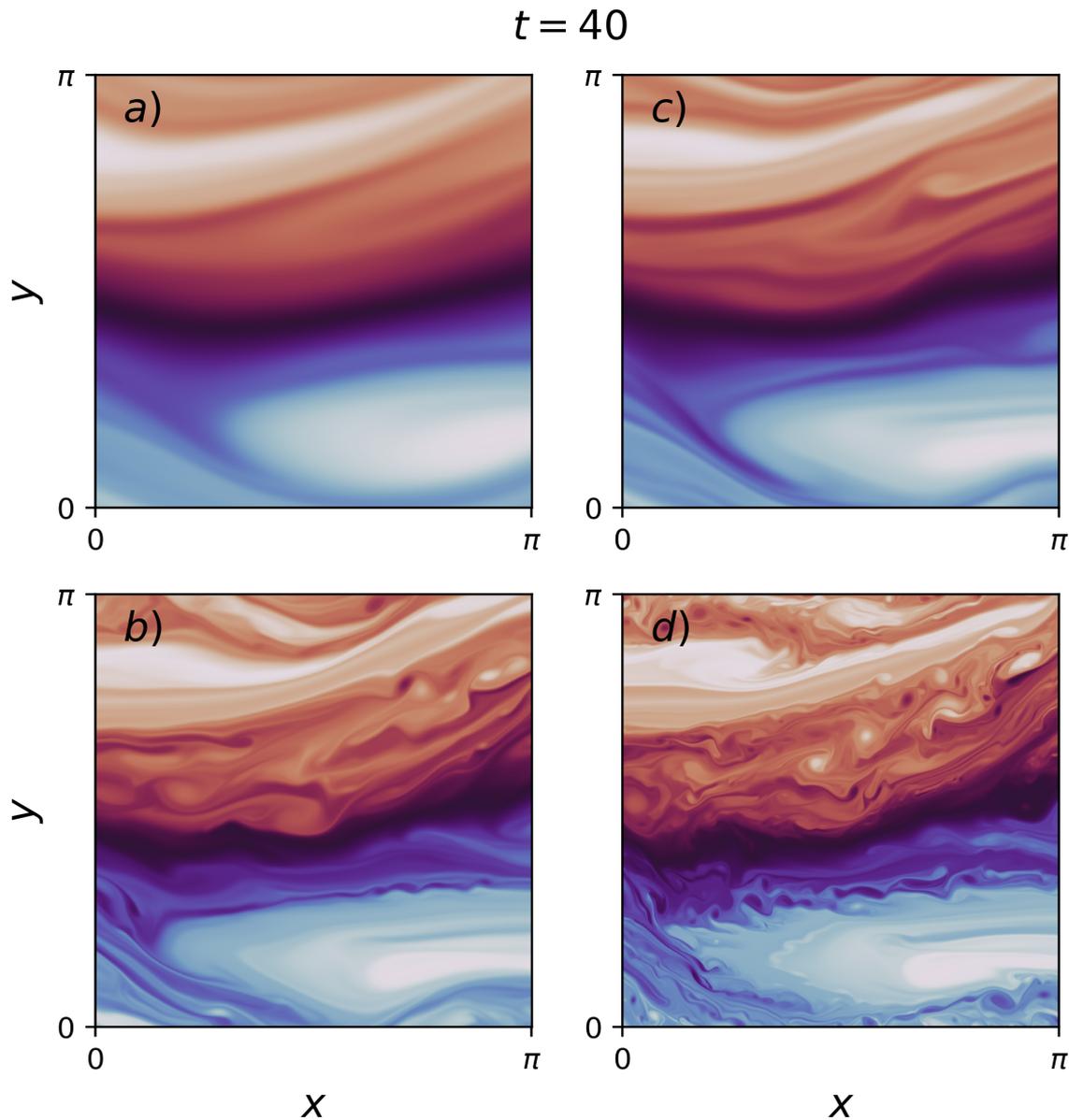


Figure 19: Champ de température à $t=15$ et $t=40$ pour $\nu = 10^{-5}$. Pour $t = 40$, l'écoulement est représentatif de la turbulence. Les valeurs de θ vont de -1 (en bleu clair) et 1 (en rouge clair).

plusieurs types de structures différentes de toutes tailles (tourbillons et filaments). Ainsi, il semblerait que la condition initiale de Constantin et al. conduise à un écoulement **turbulent en déclin**. En effet, il n'y a pas d'injection d'énergie externe (i.e. $f = 0$) et l'énergie totale diminue au cours de l'avancement en temps.

3.2 Régime turbulent en déclin: $t > 27$

Ainsi, au vu des résultats des simulations, notre approche du problème qui consistait à identifier la création d'une singularité du problème inviscide et à étudier la dynamique de l'écoulement

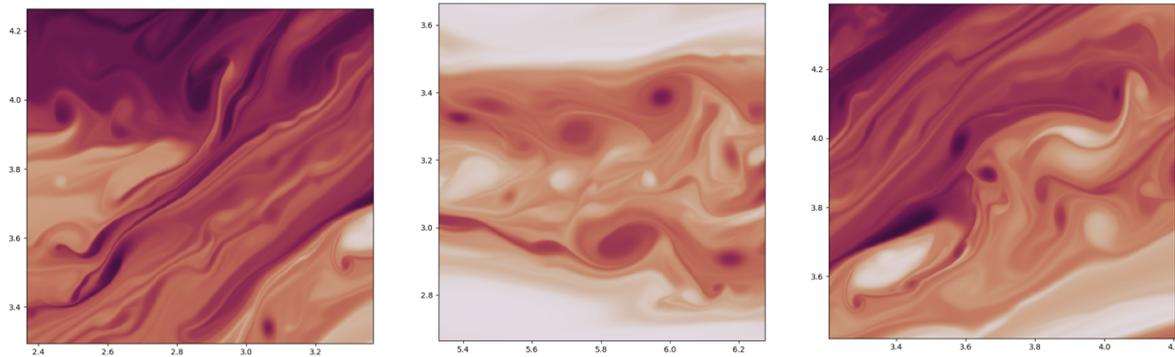


Figure 20: Champ de température à $t = 40$, agrandi sur des zones de côté $L_D/6$. Des filaments et tourbillons, de tailles et formes différentes sont présents. Les filaments semblent relier des tourbillons ou des grandes structures elliptiques entre elles. De plus, ces derniers créent de nouveaux tourbillons par compression ou en se déstabilisant par cisaillement. Même carte de température que la figure précédente.

dans son voisinage (spatial et temporel) a changé.

La démarche que nous suivons désormais **ne fait plus cas des potentielles singularités du problème invicidé**, mais regarde le problème à un temps suffisamment long, "infini" (ici $t > t_* = 27$), pour que l'écoulement soit dans un régime turbulent développé pour une viscosité finie, $\nu \neq 0$. Nous étudions ensuite les propriétés de ce système lorsque la viscosité tend vers 0. **Il y a un ordre dans les limites** : $t > t_*$ puis $\nu \rightarrow 0$.

Dans les sous-parties suivantes, nous décrivons les caractéristiques de la turbulence en déclin observées.

3.2.1 Anomalie Dissipative

La figure 21, à gauche, présente l'évolution de la dissipation totale d'énergie de surface, ϵ_θ , en fonction du temps pour les différentes viscosités simulées, $\nu \in [3 \cdot 10^{-4}; 10^{-5}]$.

Nous observons des pics de dissipation aux alentours des temps 8.5 et 15 correspondant à la formation des filaments. Cependant, la dissipation pour ces temps semblent tendre vers 0 lorsque $\nu \rightarrow 0$. En revanche, les différentes courbes suivent des comportements similaires pour $t > t_* = 27$ correspondant au régime que nous identifions comme turbulent.

De plus, le Hamiltonien semble conservé dans la limite $\nu \rightarrow 0$. En effet, la figure 21, à droite, représente l'évolution de la dissipation du Hamiltonien $\epsilon_H \nu \langle \nabla \psi \nabla \theta \rangle$ qui semble tendre vers 0 pour tous les régimes. C'est cohérent avec le fait que le Hamiltonien présente une cascade inverse dans le problème SQG turbulent [16] et qui n'est pas associée à de l'anomalie dissipative.

3.2.2 Distributions, Spectres et transferts

Dans le régime turbulent en déclin, les statistiques ne sont pas stationnaires car l'énergie n'est pas constante. Afin de pouvoir faire des moyennes en temps pour obtenir des résultats représentatifs, les champs et quantités spectrales sont renormalisées à partir des grandeurs caractéristiques turbulentes instantanées (Kolmogorov 1941 à t).

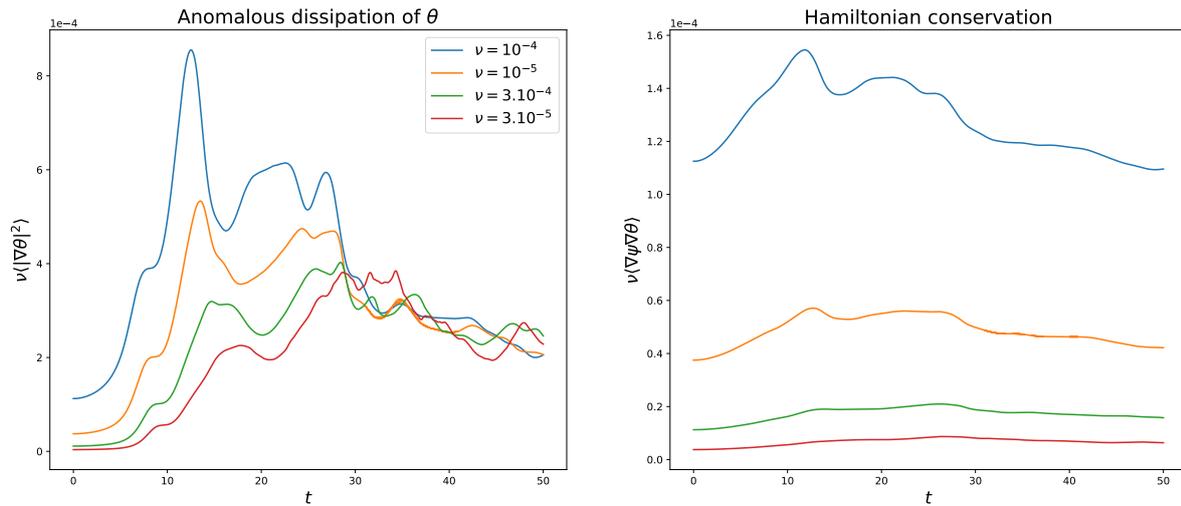


Figure 21: Gauche : Évolution de la dissipation de l'énergie de surface en fonction du temps pour différentes valeurs de la viscosité. Droite : Dissipation normale du Hamiltonien.

Incrément de température:

La figure 22 présente la distribution de l'incrément de température $\delta\theta(\vec{l}) = \theta(\vec{x}) - \theta(\vec{x} + \vec{l})$, pour différentes valeurs de $|\vec{l}|$ et deux orientations différentes à $t = 40$. La figure 18 à droite, montre que l'écoulement turbulent est fortement anisotrope. En effet, de grands fronts horizontaux séparent les zones de température chaude (en rouge) et froide (en bleu). L'agitation turbulente a principalement lieu à l'intérieur de ces zones, sans qu'il n'y ai de mélange (jusqu'à $t = 50$ le plus grand temps simulé). Ainsi, ces fronts, linéairement stables, contiennent la turbulence et sont de plus associés à une grande différence de température de part et d'autre. Cela implique également une forte dépendance des statistiques à l'orientation considérée, comme le montre la figure 22, à gauche. Les distributions sont très différentes en fonction de si les incréments sont mesurés parallèlement ou perpendiculairement aux fronts.

De plus, l'amplitude de l'incrément de température au passage des fronts est significativement plus grande que dans le reste de l'écoulement. Ainsi, la distribution et les statistiques associées (fonctions de structure, ...), même moyennées sur l'orientation de \vec{l} , restent dominées par la valeur de l'orientation perpendiculaire aux fronts principaux. Les grands fronts horizontaux modifient les propriétés turbulentes de l'écoulement.

L'écoulement de Constantin et al. semble converger vers une structure grande échelle (bleu, rouge, bleu verticalement) sur laquelle il y a un écoulement turbulent. Cette dualité et la stabilité de grandes échelles et fronts stables ont sans doute des influences sur les propriétés de la turbulence et sur la prédictibilité des trajectoires et des champs que nous étudierons par la suite.

Spectres et transferts:

L'énergie initialement comprise dans les modes 1 et 2 (cf équation 3.5), a été répartie par la dynamique turbulente sur l'ensemble des longueurs d'ondes jusqu'au mode associé à l'échelle de Kolmogorov k_η . Sur la figure 23, nous avons représenté les spectres en fonction des modes renormalisés par les grandes échelles de l'écoulement L . Celles-ci sont définies telles que : $L(t) = \mathcal{E}^{-1}(k)/kdk$. Ainsi, la pente des spectres en $k^{-5/3}$ semble identifiable sur plus d'une décade pour la valeur la plus faible de la viscosité (courbe rouge). Ensuite, le spectre devient

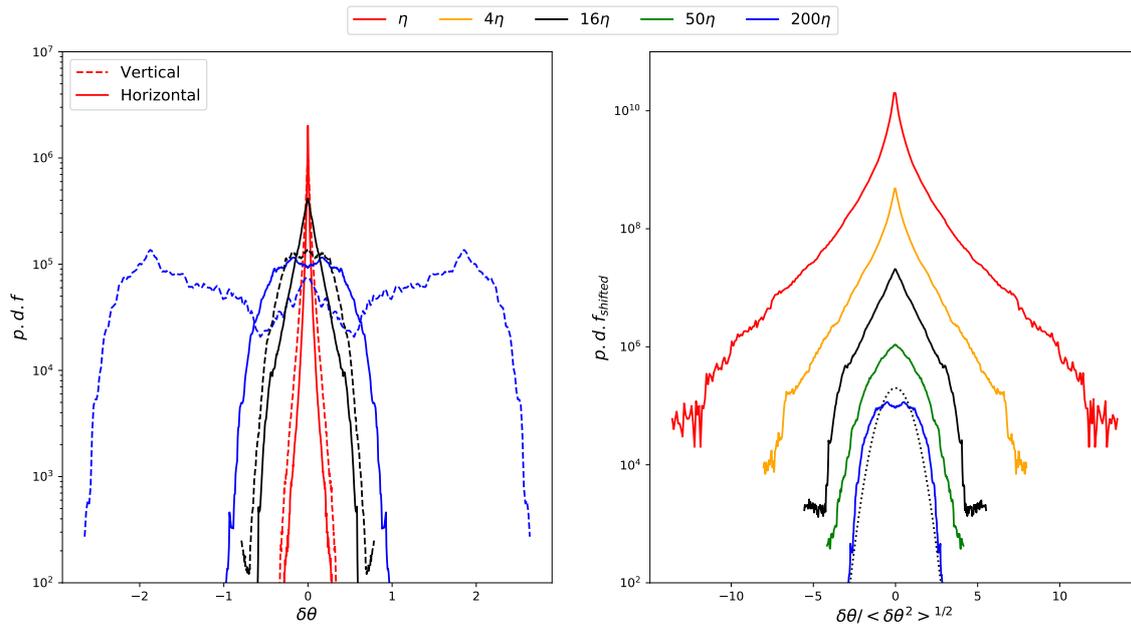


Figure 22: Distribution de l'incrément de température $\delta\theta = \theta(x) - \theta(x + \vec{l})$. Gauche : Courbe non renormalisées, pour trois valeurs de $|\vec{l}|$ et deux orientations différentes, parallèle ou perpendiculaire aux structures grandes échelles. Conclusion : forte isotropie dû aux fronts, même pour $|\vec{l}| = \eta$. A droite, distributions de l'incrément de température, renormalisée par sa variance, pour une orientation parallèle aux fronts des grandes échelles. Les courbes sont décalées pour plus de clarté. Nous identifions des formes de distributions différentes suivant les échelles.

plus pentu jusqu'à décroître exponentiellement vers k_η . Ainsi, sur plus d'une décade, la pente $-5/3$ n'est pas vérifiée. Cela peut venir de la présence de filaments et fronts à ces échelles, associés à des pentes plus pentues que -2 [16]. Le transfert d'énergie spectrale, représenté dans l'encadré de la figure 23, est cohérent avec une cascade directe sur la plage de valeur où la pente du spectre est $k^{-5/3}$ et converge vers un plateau similaire au cas turbulent forcé de la partie II. Les simulations sont alors en accords avec l'hypothèse de la cascade directe d'énergie de surface pour $t > t_*$. De plus, les échelles inertielles, où la cascade turbulente intervient, semblent s'étendre vers $k_\eta \rightarrow \infty$ lorsque la viscosité disparaît. En effet, comme dans la théorie de Kolmogorov 1941 pour les équations de Navier Stokes:

$$\eta \propto \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

. Ainsi, $\eta \rightarrow 0$ quand $\nu \rightarrow 0$.

3.3 Équivalence entre anomalie dissipative et dispersion des trajectoires lagrangiennes

Dans cette sous partie, nous présentons et discutons des connexions entre l'anomalie dissipative d'un scalaire actif, comme la température dans SQG, et les théorèmes de fluctuation dissipation de Drivas et al. [14] et le critère de stochasticité spontanée lagrangienne Backward de Gawedzki [45] pour un scalaire passif.

Nous considérons le système SQG, auquel est ajouté un scalaire passif ϕ . ϕ pourrait être expérimentalement un colorant ajouté dans le fluide et qui n'en modifie pas l'écoulement. Ainsi, ce

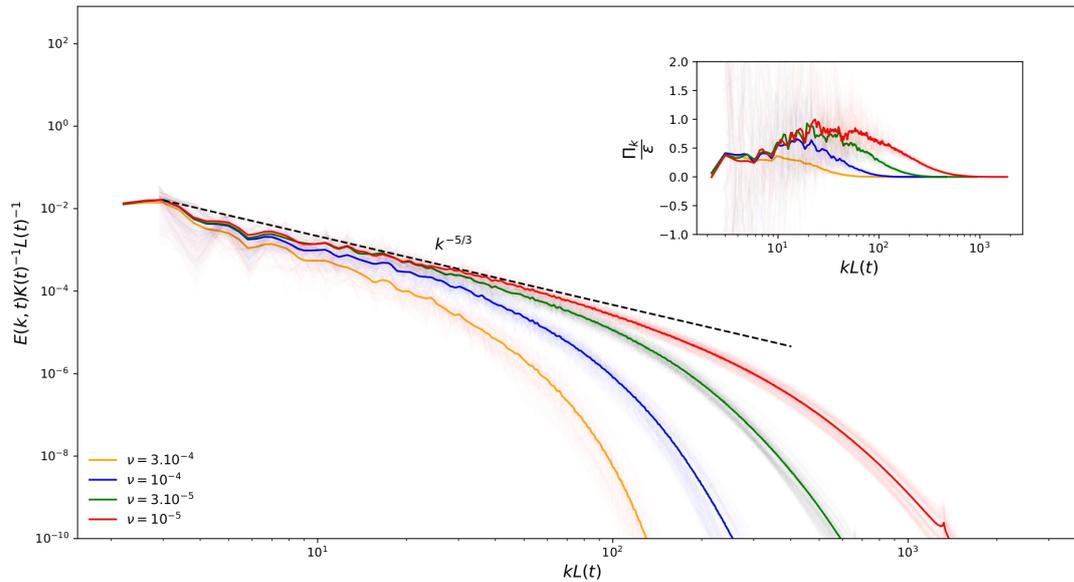


Figure 23: Spectre renormalisé de l'énergie de surface pour les différentes viscosités simulées. La grande échelle caractéristique L est définie telle que $L(t) = \mathcal{E}^{-1}(k)/kdk$. Courbes transparentes : spectre à $t \in [t_*, t_f]$. Courbes pleines : spectre moyen. Insert : Transfert d'énergie spectrale.

dernier est transporté par les lignes de courant de \vec{u} et suit une équation d'advection diffusion avec la même viscosité ν que pour l'équation SQG principale. Nous insistons sur le fait qu'il n'y a pas de lien entre \vec{u} et ϕ , (ce qui n'est évidemment pas le cas pour θ qui est relié à u par la transformée de Riezs). Le système s'écrit alors :

$$\partial_t \theta + \vec{u}(\theta) \cdot \nabla \theta = \nu \Delta \theta \quad ; \quad \partial_t \phi + \vec{u}(\theta) \cdot \nabla \phi = \nu \Delta \phi. \quad (3.6)$$

$\theta(t=0)$ suit la relation 3.5 et $\phi(t=0)$ est quelconque. La seule condition est l'existence d'une solution \mathcal{C}^2 pour θ et ϕ sur une intervalle $t \in [0, T]$.

Afin d'étudier ces deux **équations aux dérivées partielles, EDP**, nous allons utiliser les **équations aux dérivées stochastiques, EDS**, auxquelles elles sont liées. En effet, il y a une équivalence mathématique entre ces deux visions (existence d'un lien entre l'opérateur laplacien et le générateur du mouvement brownien). Physiquement cela se comprend par le fait qu'une particule de fluide transporte sa température ou sa densité du colorant dans son mouvement, et que la diffusion est en fait la modélisation du mouvement Brownien, stochastique, subit par les particules au niveau microscopique.

Deux approches sont possibles pour décrire les trajectoires aléatoires. La première consiste à étudier le problème en avançant en temps, i.e. en connaissant la position initiale des particules et regardant leurs positions aux temps futurs. Dans la seconde à l'inverse, la position finale à T est connue et on s'intéresse à leur position dans le passé (retournement du temps).

(a) Système Backward (à rebrousse-temps):

Avant de décrire les équations dans ces deux approches, nous définissons tout d'abord le système Backward, renversé en temps. Il s'obtient à partir de la transformation :

$$t \rightarrow T - t, \quad x, \quad \theta \rightarrow -\theta, \quad \phi \rightarrow \phi$$

Notons que ces transformations impliquent aussi $\vec{u} \rightarrow -\vec{u}$.

Propriété 4 (*Système Backward*). *Les changements de variables de renversement du temps conduisent aux nouveaux champs*

$$\tilde{\theta}(x, \tilde{t}) \equiv -\theta(x, T - t) \quad \tilde{\phi}(x, \tilde{t}) \equiv \phi(x, T - t), \quad \tilde{u} \equiv -u(x, T - t),$$

solutions des EDP backward :

$$\partial_{\tilde{t}}\tilde{\theta} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\theta} + \nu \Delta \tilde{\theta} = 0, \quad \partial_{\tilde{t}}\tilde{\phi} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\phi} + \nu \Delta \tilde{\phi} = 0 \quad (3.7)$$

(b) Définition des trajectoires aléatoires Lagrangiennes:

Un traceur bruité est une particule de fluide dont la trajectoire suit les lignes de courant de l'écoulement auxquelles est ajouté un faible bruit (venant physiquement de la diffusion par la viscosité ν). Cette description peut être forward ou backward en temps selon qu'on s'intéresse aux équations de Kolmogorov forward ou backward associées à cette diffusion.

Définition 3 (*Traceurs Forward*). *La position d'un traceur forward, initialement en \vec{x} à $t=0$, est représentée par le processus stochastique :*

$$X(t, \omega | x, 0) = x + \int_0^t u(X(s, \omega), s) ds + \sqrt{2\nu} W(t, \omega) \quad \forall t \in [0, T]$$

avec $W(t, \omega)$ un mouvement Brownien. Ainsi, les traceurs forward résolvent l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dX = u(X, s)dt + \sqrt{2\nu}dW \quad \text{conditionné tel que } X(0, \omega | x, 0) = x \quad (3.8)$$

Définition 4 (*Traceurs Backward*). *La position d'un traceur backward, commençant à \vec{x} à $t = T$, c'est à dire $\tilde{t} = 0$, est elle définie par le processus stochastique :*

$$\tilde{X}(\tilde{t}, \omega | x, \tilde{0}) = x + \int_0^{\tilde{t}} \tilde{u}(\tilde{X}(\tilde{s}, \omega), \tilde{s}) d\tilde{s} + \sqrt{2\nu} \tilde{W}(\tilde{t}, \omega) \quad \forall \tilde{t} \in [0, T]$$

avec

$$\tilde{W}(\tilde{t}, \omega) = W(T, \omega) - W(T - \tilde{t}, \omega)$$

également un mouvement Brownien (la renversée en temps d'un mouvement Brownien en est un).

Ainsi, les traceurs backward résolvent l'EDS :

$$d\tilde{X} = \tilde{u}(\tilde{X}, \tilde{s})d\tilde{s} + \sqrt{2\nu}d\tilde{W}(\tilde{s}) \quad \text{conditionné tel que } \tilde{X}(\tilde{t} = 0, \omega | x, \tilde{0}) = x \quad (3.9)$$

(c) Définition des champs à partir des trajectoires stochastiques

Rappel : Les champs θ et ϕ sont des fonctions de $\mathcal{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathcal{R}$.

Ainsi, il existe plusieurs formules de représentation solution du système $\phi - SQG$. Nous en citons trois utilisées dans la suite :

Propriété 5 (*Moyenne Backward*). Pour tout $t \in [0, T]$, ϕ et θ solutions du système $\phi - SQG$ sont définies à partir de la moyenne des trajectoires "dans le passé" tel que :

$$\psi(x, t) = \left\langle \psi_0 \left(X_\nu(0|x, t) \right) \right\rangle_B \quad (3.10)$$

où ψ peut être le scalaire actif θ et passif ϕ .

Propriété 6 (*Formule d'Ito sur l'EDS backward*). Les champs scalaires passifs et actifs admettent tous les deux une représentation "associée à une réalisation du Brownien backward (à une trajectoire)" tel que presque sûrement :

$$\psi(X_\nu(T|x, t) = x, t) = \psi_0(X_\nu(0, \omega|x, T)) \pm \sqrt{2\nu} \int_0^T \nabla \tilde{\psi}(\tilde{X}, \tilde{s}) \cdot d\tilde{W}(\tilde{s}) \quad (3.11)$$

avec $\pm = +1$ pour $\psi = \theta$ et -1 pour $\psi = \phi$.

Propriété 7 (*Moyenne Forward*). Enfin, les champs scalaires peuvent se définir tel que:

$$\psi(x, t) = \left\langle \psi_0(x_0) \delta \left(x - X_\nu(t|x_0) \right) \right\rangle_{F, x_0}$$

Soit $p_\nu(x, t|x_0)$ la probabilité d'être en x à l'instant futur t en sachant être en x_0 à 0, aussi appelée la probabilité à un point forward. Alors,

$$\psi(x, t) = \int_{\mathcal{R}^2} dx_0 \psi_0(x_0) p_\nu(x, t|x_0) \quad (3.12)$$

(d) Backward Vs Forward

De la même manière que dans la propriété 3, la moyenne backward (prop. 2) peut se réécrire en introduisant la **densité de probabilité backward**, $p_\nu(x_0|x, t)$ qui décrit la probabilité qu'une particule qui est finalement en x à t provienne initialement de x_0 . Dans ce cas :

$$\psi(x, t) = \int_{\mathcal{R}^2} dx_0 \psi_0(x_0) p_\nu(x_0, 0|x, t) \quad (3.13)$$

De plus, dans le cas d'un **écoulement incompressible**, ce qui est le cas du système $\phi - SQG$, nous pouvons démontrer que :

Propriété 8 (*Backward - Forward*). Supposons que le champ de vitesse soit incompressible, alors

$$p_\nu(x, t|x_0) = p_\nu(x_0|x, t) \quad (3.14)$$

les densités de probabilité à un point backward et forward sont identiques.

(e) Stochasticité spontanée Lagrangienne

A partir de la probabilité à un point backward, i.e. la probabilité de venir initialement d'un point x_0 en sachant être en x à l'instant t , la probabilité dans l'espace produit à deux points est définie telle que :

Définition 5 *Soit*

$$p_\nu^2(\cdot, \cdot | x_1, x_2, t) : \mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

la probabilité conditionnée à deux points telle que deux particules en x_1 et x_2 à l'instant t proviennent initialement de $x_{1,0}$, $x_{2,0}$ à $t = 0$.

Notons bien que, comme l'est la probabilité à un point, **la probabilité à deux points dépend du champ de vitesse \vec{u}** , de ses caractéristiques qui dépendent elles même notamment de la viscosité.

Nous pouvons alors définir proprement **la stochasticité spontanée lagrangienne** telle que

Définition 6 (*Stochasticité spontanée lagrangienne*). Supposons $p_2^\nu(\cdot, \cdot | x_1, x_2, t)$ telle que définie précédemment. De plus, on introduit

$$p_2^0(\cdot, \cdot | x_1, x_2, t) = \lim_{\nu \rightarrow 0} p_2^\nu(\cdot, \cdot | x_1, x_2, t)$$

et

$$\bar{x}_0 = \left\langle \lim_{\nu \rightarrow 0} \tilde{X}_\nu(x, \tilde{t}) \right\rangle$$

alors,

$$p_2^0(x_1, x_2 | x, x, t) \neq \delta(\tilde{X}^0(x, \tilde{t}) - x_1) \delta(\tilde{X}^0(x, \tilde{t}) - x_2) \quad (3.15)$$

\Leftrightarrow

Les trajectoires backward partant de x à t sont spontanément stochastiques

(f) Lien entre la stochasticité spontanée Lagrangienne et la dissipation anormale :

Finalement, à partir de la représentation moyennée forward (propriété 4), Gawedzki [45] relie la stochasticité spontanée des trajectoires lagrangiennes dans la limite $\nu \rightarrow 0$ et la dissipation anormale de l'énergie du scalaire (actif ou passif), $2\mathcal{E} = \langle \psi^2 \rangle$.

Ainsi,

$$\left\langle (\psi_0(y_2) - \psi_0(y_1))^2 p(y_1, y_2 | x, x, t) \right\rangle_{x, y_1, y_2} = \left\langle \psi_0^2 \right\rangle_x - \left\langle \psi^2 \right\rangle_x \quad (3.16)$$

où $\langle * \rangle_x$ désigne l'intégrale sur le domaine \mathcal{D} et $\langle * \rangle_{x, y, z}$ l'intégrale sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

De même, à partir de la représentation par trajectoires (propriété 3), Drivas et al. [14] ont établi :

$$\left\langle (\psi_0(y_2) - \psi_0(y_1))^2 p(y_1, y_2 | x, x, t) \right\rangle_{x, y_1, y_2} = 2\nu \int_0^t d\tilde{s} \left\langle \|\nabla \tilde{\psi}(\tilde{X}, \tilde{s})\|^2 \right\rangle_{B, x} \quad (3.17)$$

Où $\langle \rangle_{B, x}$ est la moyenne sur le brownien backward puis sur l'ensemble du domaine.

Ces relations lient, d'une part (terme de gauche), la probabilité à deux points de la séparation des trajectoires backward intégrée sur l'ensemble du domaine et d'autre part (termes de droite) la non conservation de l'énergie du scalaire au cours du temps. Notons que dans la relation de Gawedzki, l'évolution de l'énergie est décrite directement à partir des champs scalaires aux temps initiaux et finaux t , tandis que dans celle de Drivas, la dissipation de l'énergie est décrite à partir de la moyenne des dissipations engendrées par chacune des trajectoires correspondant à une réalisation du brownien.

Dans tous les cas, les termes de droite valent :

$$\text{terme de droite} = 2 \int_0^t \epsilon_\psi \quad (3.18)$$

A partir des relations précédentes, nous pouvons donc enfin établir l'équivalence tant attendue :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \epsilon_\psi \neq 0 \quad (3.19)$$

$$\Leftrightarrow$$

$\exists A$ de mesure non nulle $\subset \mathcal{D}$ tel que $\forall x \in A$,

les trajectoires backward arrivant en x sont spontanément stochastiques.

En présence d'anomalie dissipative, il faut donc considérer les trajectoires des particules en terme probabilistes, alors même que la diffusion disparaît. **Le flot lagrangien est donc mal défini dans la limite invicide !**

Il faut néanmoins appuyer sur le fait que pour un scalaire actif, la probabilité étant dépendante du champ de vitesse, certaines conditions initiales peuvent donner lieu à des configurations où un ensemble de point de l'écoulement (de mesure nulle par exemple) soit associé à des trajectoires spontanément stochastiques sans que toutefois ces dernières entraînent une dissipation anormale de l'énergie.

3.4 Statistiques lagrangiennes dans le régime turbulent

Les résultats et théories présentés dans les parties précédentes montrent que d'une part, la condition initiale de Constantin et al. conduit à l'apparition d'un régime turbulent dans lequel la dissipation de l'énergie de surface semble perdurer dans la limite invicide. D'autre part, cette présence d'anomalie dissipative implique que les trajectoires, backward et forward, deviennent de moins en moins bien définies dans la limite $\nu \rightarrow 0$.

Pour expliquer ce que nous entendons par "mauvaise définition des trajectoires dans la limite invicide", nous considérons deux particules en x_1 et x_2 distantes de r à t . Ces dernières sont uniquement advectées par le champ de vitesse tel que :

$$\frac{dX}{dt} = u^\nu(X, t)$$

et constituent des traceurs des lignes de courant (non bruité ou aléatoire). La viscosité, faible, reste finie $\nu > 0$. De plus, nous supposons que les trajectoires sont spontanément stochastiques dans la limite invicide. Alors, il existe un intervalle de valeur $I^\nu = [r_{min}^\nu, r_{max}^\nu]$ et un temps τ tel que $\forall r \in I$, la distance moyenne $d(\tau)$ entre les deux particules à $t \pm \tau$ vaut $d(\tau) = cte(\tau)$ **indépendante de r** . En effet, dans cette plage de valeur, ce sont les effets liés à la non dérivabilité du champ de vitesse et du choix "probabiliste" de la trajectoire qui dominant. De plus, dans la limite $\nu \rightarrow 0$, la borne inférieure de I^ν tend aussi vers 0 :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} r_{min}^\nu = 0$$

Ainsi, afin d'étudier les propriétés de p_2^0 , nous allons étudier l'évolution dans la limite invicide de la distance entre des particules du fluide conditionnées sur le temps de départ t_* , d'arrivée $t_* \pm \tau$, sur la viscosité ν et sur la distance initiale entre les particules r .

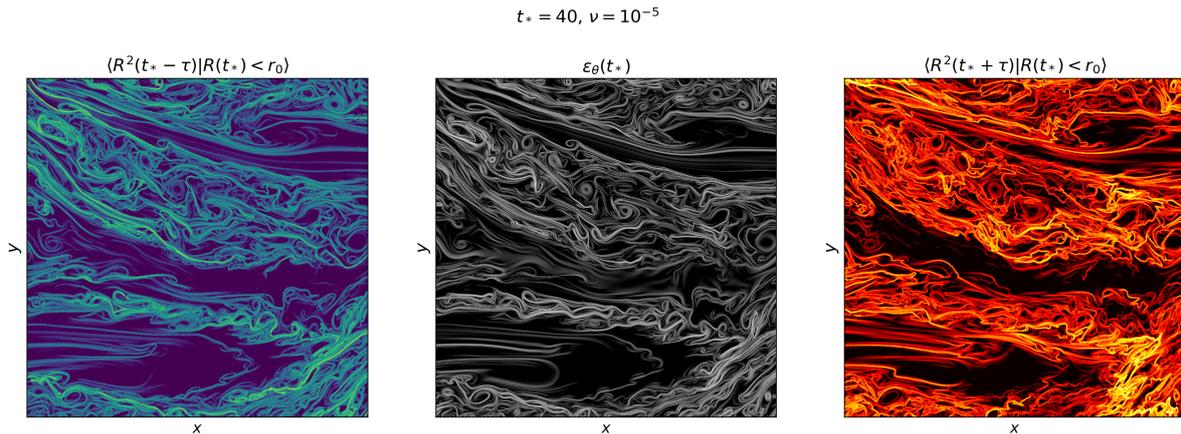


Figure 24: (Triptique). Mise en évidence de la corrélation entre dissipation et dispersion des trajectoires lagrangiennes backward. A gauche, distance au carré à $t_* - \tau$ des particules en x à t_* et distantes de moins de $r_0 = \eta$. A droite, même tracé forward. Au centre, champs de dissipation de l'énergie de surface $\epsilon_\theta(x, t_*)$ à t_* . Les échelles de couleurs sont logarithmiques. Les cartes de gauche et du centre sont très fortement corrélés. De plus, la dispersion forward est aussi associée aux structures fortement dissipatives.

(a) Lien entre la dispersion des trajectoires et la dissipation :

Tout d'abord, la figure 24 illustre parfaitement la corrélation entre la dissipation de l'énergie et la séparation lagrangienne des particules par l'écoulement. En effet, la carte du milieu présente le champs de dissipation locale $\epsilon_\theta(x, t = t_*)$ pour $t_* = 40$ tandis que les figures de gauche et de droite présentent la distance au carré qu'auront aux temps $t = t_* \pm \tau$ les particules distantes de η à t_* . A gauche (resp. droite), nous observons le problème backward (resp. forward). Les résultats de Gawedzki et Drivas ont été établis pour les trajectoires backward. La corrélation entre dissipation et séparation des trajectoires est alors claire, sachant que dans les deux cas les couleurs sont tracées en échelle logarithmique. Pour le problème forward, il n'y a pas de résultats théoriques. Nous savions néanmoins que la dispersion des trajectoires backward entre $[t_* - \tau; \tau]$ implique également la dispersion forward dans ce même intervalle. Si nous supposons que les statistiques de la turbulence ont atteint un équilibre statistiquement stationnaire malgré le déclin, alors il paraît normal que les trajectoires forward présentent également une forte dispersion sur $[t_*, t_* + \tau]$. De plus, même si la corrélation avec le champ de dissipation est moins forte, les structures très dispersives restent fortement liées aux structures très dissipatives.

(b) dispersion de Richardson :

La figure 25 présente la distance au carré moyennée sur l'ensemble de l'écoulement des particules initialement distant de $r \in [\eta/2; 20\eta]$ pour $\nu = 10^{-5}$, i.e. la simulation la plus turbulente que nous ayons faite.

Pourtant, nous ne voyons pas le phénomène non linéaire qui était attendu. La dispersion dépend toujours de la distance initiale jusqu'à ce que les courbes commencent à se rejoindre et vont (or des simulations effectuée) saturer à une valeur limite (les particules ne peuvent pas être plus éloignées qu'une certaine valeur). C'est étonnant vis à vis de la présence présumée de l'anomalie dissipative.

De plus, la dépendance dans la distance initiale n'est pas triviale. Sur les figures 26 et 27 nous avons représenté l'évolution moyenne du carré de la séparation renormalisée par $R_*^{-2\beta}$ où R_* est la distance initiale entre les particules et $\beta = 1, \beta = 1/2$.

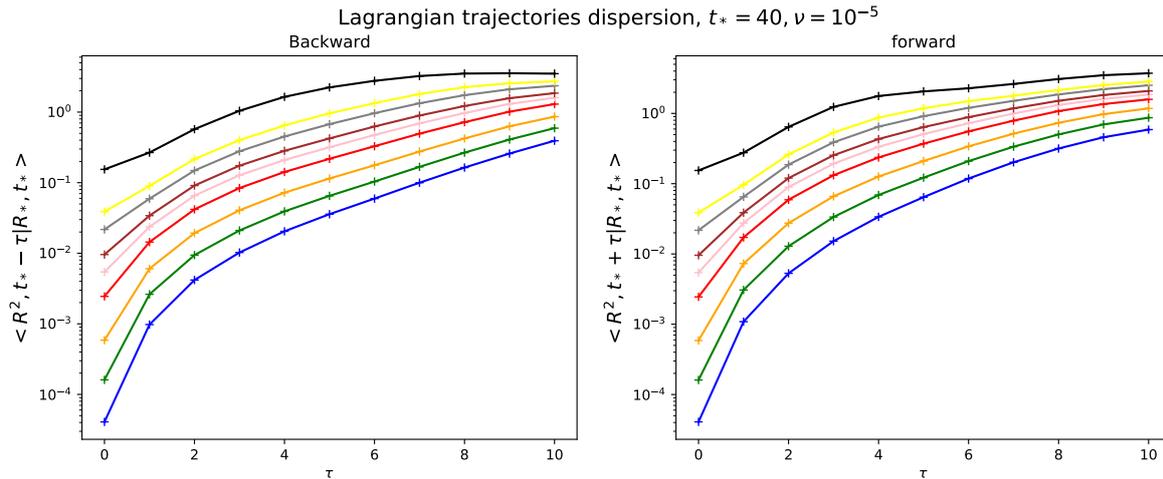


Figure 25: Gauche (resp droite) : Moyenne du carré des distances en fonction de $\tau = t - t_*$ et pour différentes distances initiales. Dans l'ordre, les courbes bleu, vert, orange, rouge, marron, grise, jaune et noire correspondent respectivement à $r_0 = 2/3\eta, 4/3\eta, 8/3\eta, 16/3\eta, 8\eta, 32/3\eta, 16\eta, 64/3\eta, 128/3\eta$.

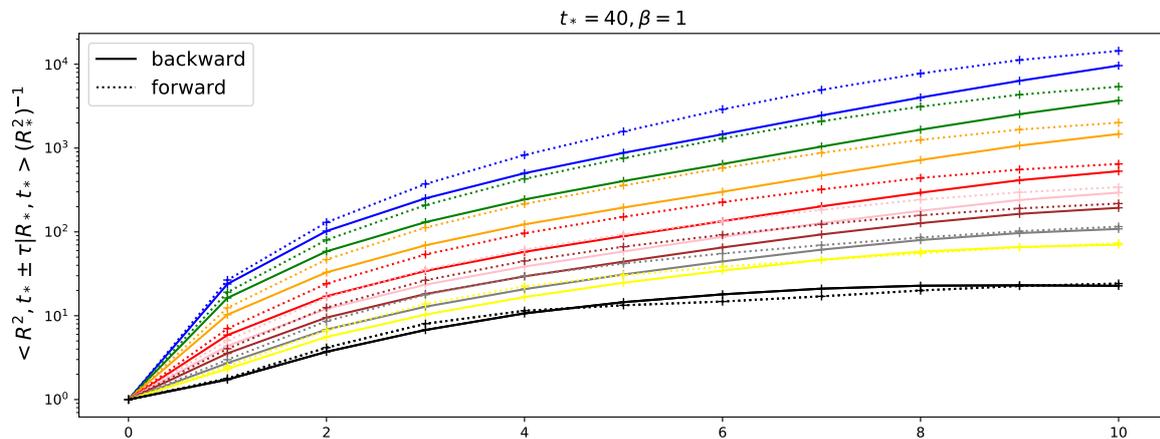


Figure 26: Évolution backward de la distance au carré des traceurs initialement distant de R_* renormalisé par $R_*^{-2\beta}$. $\beta = 1$. Les couleurs des courbes sont les mêmes que pour la figure 25

Nous remarquons alors que sur la figure 26 les courbes ne se chevauchent pas et la séparation des particules n'est pas simplement proportionnelle à la distance initiale jusqu'à la saturation.

De plus, nous pouvons voir sur la figure 27 que les courbes "se rapprochent" (surtout pour les faibles valeurs de la séparation initiale) lorsque l'on renormalise par $(R_*^2)^{1/2}$. Ensuite les courbes se séparent lorsque l'on se rapproche de la saturation car elle est évidemment indépendante de la distance initiale.

Nous observons donc un comportement plus imprédictible que du chaos, car la dépendance en $d(0)$ est plus faible, mais moins que celle attendue pour de la stochasticité spontanée Lagrangienne.

Cela pourrait être dû à la non homogénéité de la turbulence et la superposition dans l'écoulement de structures stables et non associées à de la stochasticité spontanée (fronts stables, grandes échelles et écoulement à la Beltrami ...) et d'autres dont les trajectoires deviennent spontanément stochastiques dans la limite inviscide. La mesure de ces deux ensembles doit être non triviale dans l'écoulement tel que la statistique précédente a été polluée par les deux effets l'un sur l'autre.

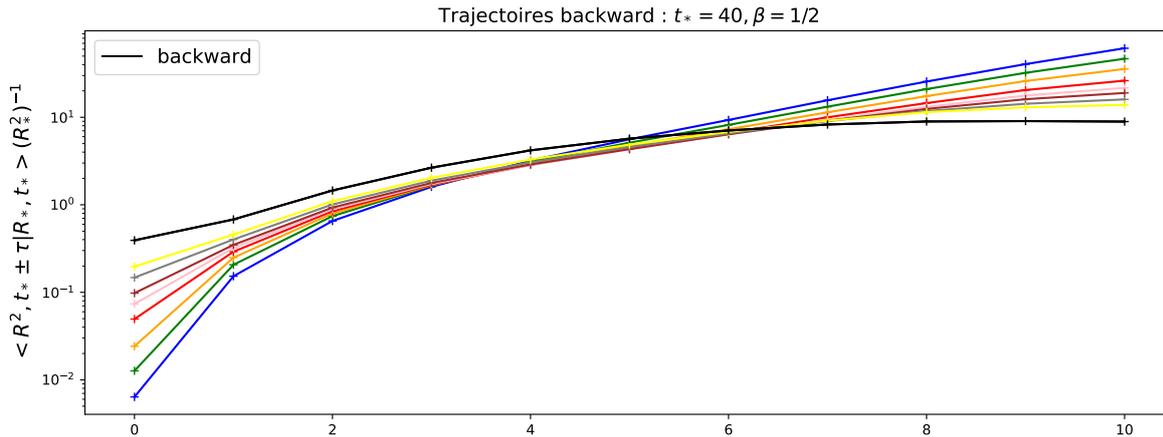


Figure 27: Même description que pour 26 avec $\beta = \frac{1}{2}$.

Pourtant, l'ensemble associé à des trajectoires explosives doit être suffisamment significatif pour que la dissipation se conserve dans la limite inviscide.

Nous ne pouvons pas conclure à l'heure actuelle et dans les prochaines semaines, nous allons explorer deux pistes :

1. Premièrement, Nous allons réitérer la même étude mais cette fois ci pour des puissances différentes de la distance entre les particules, i.e. $d_\beta(\tau) = \langle \|X_1 - X_2\|^\beta \rangle_x$ avec $\beta \in [1, 10]$. Cela pourrait permettre de mettre plus ou moins de poids aux évènements forts et peu fréquents et ainsi enlevé non artificiellement l'effet des zones lisses qui ne seraient pas associées à de la dispersion explosive des particules fluides.
2. Une autre approche consisterait à conditionner les statistiques sur la valeur de la dissipation, i.e. sur les zones les plus turbulentes. Les structures dissipatives étant liées aux zones dispersives pour les équations du scalaire actif, cela permettrait de ne choisir que les particules nous intéressant.

Conclusion de la partie :

Nous avons donc étudié dans cette partie des caractéristiques de la turbulence SQG à partir de considérations lagrangiennes, i.e. sur les propriétés des trajectoires des particules de fluide dans l'écoulement. Ainsi, même s'il n'est pas su si une singularité apparaît en temps fini à partir de la condition initiale de Constantin et al., cette dernière donne lieu à un régime turbulent, identifié grâce à la persistance de la dissipation de l'énergie dans la limite inviscide. Les spectres et transferts turbulent sont alors cohérent avec une cascade directe intermittente associé à un écoulement rugueux dans la limite $\nu \rightarrow 0$. Dans ce cas, cet écoulement rentre dans la théorie développée pour les scalaires passifs par Gawedzki ou la relation de Drivas et al. qui lie la dissipation de l'énergie du scalaire actif à la dispersion des trajectoires stochastiques backward. Nous nous attendions alors à observer un tel comportement spontanément stochastique lagrangien dans l'écoulement. Pourtant nous ne voyons qu'un effet moins prédictible qu'une dispersion exponentielle associée à système chaotique classique mais qui n'est pas non plus cohérent avec la stochasticité spontanée. D'autres mesures (locale ?, autres normes ?, différent protocole ?) seront faites dans les prochaines semaines afin de conclure sur la stochasticité spontanée lagrangienne pour la condition initiale de Constantin.

4 Vers la stochasticité spontanée eulérienne

Nous avons vu dans la section précédente que, au moins théoriquement, les trajectoires des particules sont mal définies dans la limite turbulente des équations SQG (sous l'hypothèse de la présence d'anomalie dissipative).

Or, ce sont ces particules qui transportent avec elles le champ de température θ . Nous pouvons donc nous demander s'il pourrait exister un phénomène encore plus fort où l'évolution du champ de température lui-même ne serait pas un problème mathématiquement bien posé dans la limite $\nu \rightarrow 0$. C'est ce que l'on appelle la **stochasticité spontanée Eulérienne**.

Par analogie avec la stochasticité spontanée lagrangienne, la stochasticité spontanée eulérienne se définit telle que la distance entre deux solutions, définie par une norme de l'espace des champs de température, croît de manière explosive et ne dépend plus de la séparation initiale entre les deux champs au bout d'un temps τ fini.

Définition 7 (*Stochasticité Spontanée Eulérienne*).

Le système SQG perturbé est défini par :

$$\partial_t \theta + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \theta = \nu \Delta \theta + \delta f_{\text{bruit}}(x, t) \quad (4.1)$$

avec f_{bruit} un bruit d'amplitude ≈ 1 et δ l'amplitude caractéristique de la perturbation.

Soit θ_0 une condition initiale turbulente, $\theta^0(x, t)$ est la solution de 4.1 avec $\delta = 0$ et $\theta^0(x, 0) = \theta_0$ et $\theta^\delta(x, t)$ la solution de 4.1 tel que $\|\theta^\delta(t=0) - \theta_0\|_{\mathcal{N}} \approx \delta$ pour \mathcal{N} une norme de l'espace des champs de température. De plus, $\tau \approx 1$ est une constante.

Le champ θ est spontanément stochastique si :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \|\theta^\delta - \theta^0\|_{\mathcal{N}}(\tau) = \text{cte} > 0 \quad (4.2)$$

L'ordre dans les limites est important! En effet, il faut premièrement faire apparaître des singularités/quasi-singularités dans l'écoulement et ensuite faire tendre la perturbation vers 0. Ainsi, d'après le modèle initial de Lorenz [3], les perturbations aux petites échelles, dans la gamme inertiel, s'amplifient et remontent vers les plus grandes échelles en temps fini. Il faut donc faire tendre les échelles inertielles jusqu'au modes infinis (échelle nulle) et ensuite on peut faire disparaître le bruit qui, aussi petit soit-il perturbera des échelles du régime inertiel. Cela permettrait donc aux solutions de diverger en temps fini pour un bruit arbitrairement faible.

Remarque :

Si la stochasticité spontanée eulérienne est une caractéristique générique du système SQG, alors l'évolution du champ de température est nettement plus sensible aux perturbations et bruits que celle d'un système chaotique classique. En effet, en posant la distance $D = \|\theta^\delta - \theta^0\|_{\mathcal{N}}$, nous retrouvons la même distinction que pour la séparation des particules décrite dans la partie III (eq. 3.2, eq. 3.3, et propriété 3) :

$$D(t) = D(0)e^{\lambda t} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0, t=\tau]{} 0 \quad (\text{Séparation chaotique}) \quad (4.3)$$

avec λ l'**exposant de Lyapunov de l'espace des solutions**. Pour les effets non linéaires :

$$D(t) \propto g t^\alpha \xrightarrow[\delta \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0, t=\tau]{} g \tau^\alpha \quad (\text{Séparation non linéaire}) \quad (4.4)$$

avec α et g des **constantes indépendantes de la séparation initiale** (différentes de 3.3).

4.1 Motivations

En plus du fait que le système SQG représente l'advection d'un scalaire actif dont les trajectoires sont stochastiques dans la limite inviscide, des études récentes portant sur diverses équations hydrodynamiques (Navier Stokes, Euler, SQG, ...) incitent à penser que la turbulence SQG est effectivement spontanément stochastique.

Ces études se regroupent sous trois approches différentes :

1. Premièrement, la stochasticité spontanée des équations différentielles ordinaires (EDO) non linéaires et couplés, possédant un point où le flow n'est pas dérivable [46]. Par exemple, l'équation classique modèle de la dispersion de Richardson : $d_t f = f^{1/3}$. La stochasticité spontanée des EDO a également été approfondie dans les modèles en couche des équations d'Euler. Dans ces derniers, l'EDP est remplacée par un système (infini) d'EDO couplées non linéaires. Mailybaev et al. [47] ont alors montré que, en exprimant le système avec de nouvelles variables adaptées, une singularité (associée à une onde progressive dans les nouvelles variables) apparaît en un temps t_* fini. Ensuite, pour $t > t_*$, la dynamique permet la remontée de n'importe quelle information venant des modes infinis (d'énergie nulle) en temps fini. Ainsi, la solution du champ pour n'importe quel temps $t > t_*$ est probabiliste.
2. Thalabard, Bec, et Mailybaev [10] sont eux directement partis d'une condition initiale singulière des équations d'Euler 2D associée à l'instabilité de Kelvin-Helmoltz. Ils montrent qu'en régularisant le problème (en lissant la singularité à l'aide d'une viscosité par exemple), puis en le bruyant, la double limite, viscosité vers zéro puis amplitude du bruit vers 0, fait conduit à l'apparition de champs de vitesse macroscopiquement différents en temps fini.
3. Lorenz [3] propose un modèle décrivant l'évolution de l'écart entre deux solutions initialement proches (dans le sens de la distance dans l'espace des solutions) à partir d'une linéarisation autour d'une solution de référence des équations d'Euler 2D. Il montre alors l'existence d'un mur de prédictibilité maximal, le "réel effet papillon", ou stochasticité spontanée eulérienne. Le modèle repose sur une modélisation du spectre avec une pente en $-5/3$ qui n'est pas cohérente avec la phénoménologie des équations d'Euler/ Navier Stokes 2D. En revanche, ce modèle a été généralisé par Rotunno dans [48] pour les équations SQG, où la pente en $-5/3$ est admise. Il montre alors les mêmes résultats que Lorenz, et l'explosivité de la séparation des solutions.

Si ces études donnent à penser que certains écoulements hydrodynamiques (Navier Stokes, Euler, SQG, ...) sont spontanément stochastiques, ces dernières reposent toutes sur des modèles ne prenant pas en compte toutes la complexité de la turbulence et il n'y a pas, à ma connaissance, de mise en évidence directe de la stochasticité spontanée directement à partir des équations ou de simulations numériques directes. Pour les équations de Navier Stokes 3D, cela semble délicat numériquement car cette étude requiert de faible valeur de la viscosité et de faire plusieurs simulations afin d'établir des statistiques. C'est pourquoi les équations SQG 2D semblent un excellent terrain d'expérimentation du fait de leur coût numérique raisonnable.

4.2 Perturbation instantannée dans le régime turbulent

4.2.1 Protocole

Pour commencer, nous avons étudié la potentielle présence de stochasticité spontanée eulérienne dans le régime "turbulent" pour l'écoulement issu de la condition initiale de Constantin et al. [11].

Dans ce cas, plusieurs protocoles ont été envisagés. Celui retenu dans cette étude consiste à :

1. résoudre directement les équations SQG à partir de la condition initiale de Constantin jusqu'au temps $t_p = 30$,
2. ajouter un bruit η_b , d'amplitude $\sqrt{2\delta|\vec{k}|}$ sur chacun des modes \vec{k} du champ de température solution pour $t = t_p$,
3. résoudre directement les équations SQG à partir de cette nouvelle condition initiale turbulente perturbée.

Ensuite, nous nous intéressons à la séparation des champs de vitesse, $\theta^\delta - \theta^0$ en norme L^2 (sauf cas particuliers) dans la double limite $\nu \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0$. θ^0 est la solution sans bruit.

Cependant, les résultats obtenus avec le protocole précédent n'ont pas été très concluants quant à la stochasticité spontanée eulérienne de l'écoulement. En effet, nous obtenons des résultats peu clairs, à l'image de ceux pour la stochasticité spontanée lagrangienne des trajectoires : la différence aux temps t dépend toujours de la distance initiale en norme L^2 , avant saturation mais cette dépendance n'est pas linéaire (i.e. plus faible que pour un système dynamique chaotique).

Cela peut être dû au fait que les simulations considérées ne sont pas assez turbulentes. Afin d'en être surs (à moindre coût numérique), nous avons effectué des simulations hyper-visqueuses, i.e. tel que le coefficient p du laplacien dans l'équation SQG dissipative (2.1) est plus grand que 1. Ici, nous avons retenu $p = 4$ et $p = 8$. La sous-partie suivante présente les caractéristiques turbulentes de ces solutions hyper-visqueuses.

4.2.2 Simulations hyper-visqueuses

L'hyper-viscosité permet de restreindre l'impact de la viscosité sur une zone plus concentrée autour de η . En effet, dans le domaine de Fourier, le terme visqueux s'écrit $\propto k^{2p}\hat{\theta}$. Ainsi, pour $p > 1$, la fonction k^{2p} est plus plate que k^2 pour les petites valeurs de k et agit plus fortement aux grands modes.

Il est donc possible avec cette méthode d'obtenir une plus grande plage inertielle où vont se développer les interactions non linéaires et les phénomènes que l'on pense associés à la stochasticité spontanée.

Cependant, il faut bien noter que ce ne sont plus les mêmes équations et que cette modification peut affecter les interactions non locales (entre de grands et petits modes) qui sont a priori importantes dans la dynamique SQG [49].

Spectres et transferts :

Ainsi, nous pouvons voir sur la figure 28 que les spectres hyper-visqueux présentent une plus large zone où la pente peut être assimilée à $k^{-5/3}$. De plus, le transfert spectral (fig. 28 à

droite) montre clairement la présence d'une cascade directe d'énergie spectrale sur une décade supplémentaire par rapport aux simulations $\alpha = 1$. De plus, cette cascade est également associée à l'anomalie dissipative comme le montre la figure 29. Nous pouvons voir que la dissipation pour les simulations hyper-visqueuses converge également à partir de $t \approx 27$ vers une courbe moyenne en déclin. Cela nous permet d'insister d'avantage sur le fait que la nature de la dissipation (valeur, hyper-viscosité ou non,...) n'influe pas sur la valeur de la dissipation qui est due au transfert non linéaire dans la cascade et est dominée par les grandes échelles.

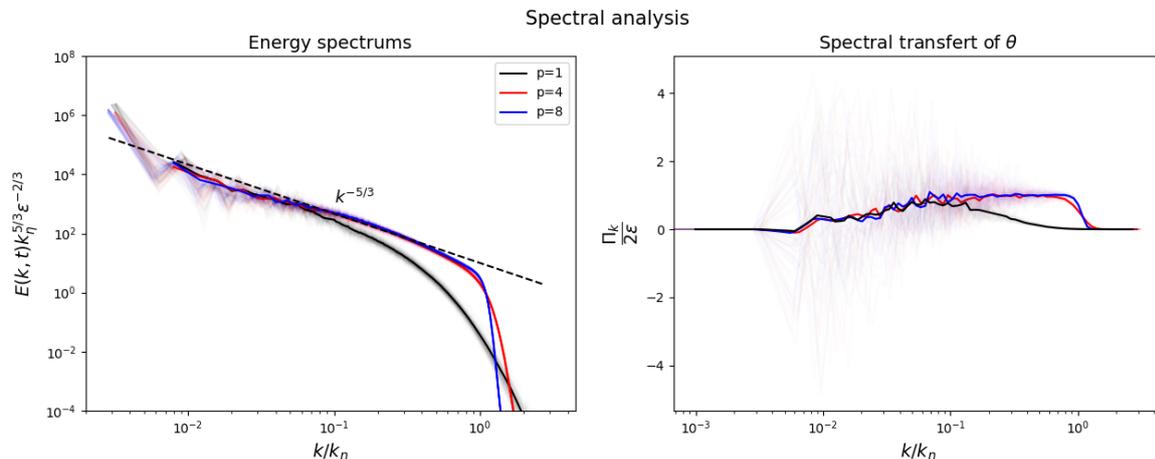


Figure 28: Gauche : Spectres renormalisées de l'énergie de surface pour différentes valeurs d'hyperviscosité p . A droite : Transfert d'énergie spectrale. Nous remarquons que pour les simulations hyper-visqueuses, la pente du spectre en $-5/3$ et le plateau du flux spectral sont respecté sur une décade de plus que pour les équations SQG dissipatives normales.

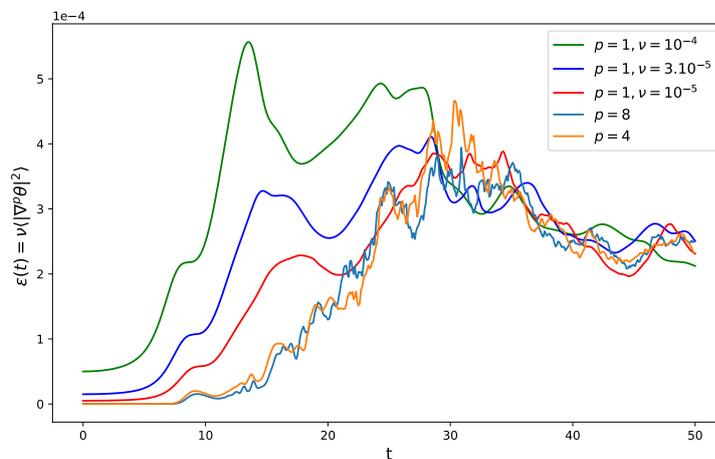


Figure 29: Dissipation de l'énergie de surface pour différentes valeurs de viscosité et hyper-viscosité. Dissipation anormale pour $t > 27$.

Champs initiaux perturbés :

Les simulations hyper-visqueuses n'ont été faites que pour une résolution de 2048^2 , et pour une seule valeur de l'hyper-viscosité et pour le seul paramètre $p = 4$. Nous n'avons donc pas fait la limite $\nu \rightarrow 0$ mais observons juste la divergence des champs pour différentes amplitudes et réalisations de la perturbation.

Ainsi, nous perturbons la solution hyper-visqueuse à $t_p = 30$ pour $\delta \in [10^{-11}, 10^{-7}]$. Dans

toutes ces simulations, l'énergie injectée par la perturbation est négligeable (de plus de 8 ordres de grandeur) par rapport à l'énergie de surface totale.

La figure 30 montre les champs de température initiaux à t_p pour 3 réalisations du bruit et $\delta \in [10^{-11}, 10^{-9}]$ et, dans le coin haut gauche est présentée la solution non perturbée. Seul un sous domaine de coté π est représenté. La figure 31 est identique mais zoomée sur un sous domaine de coté $\pi/2$ dans une zone turbulente.

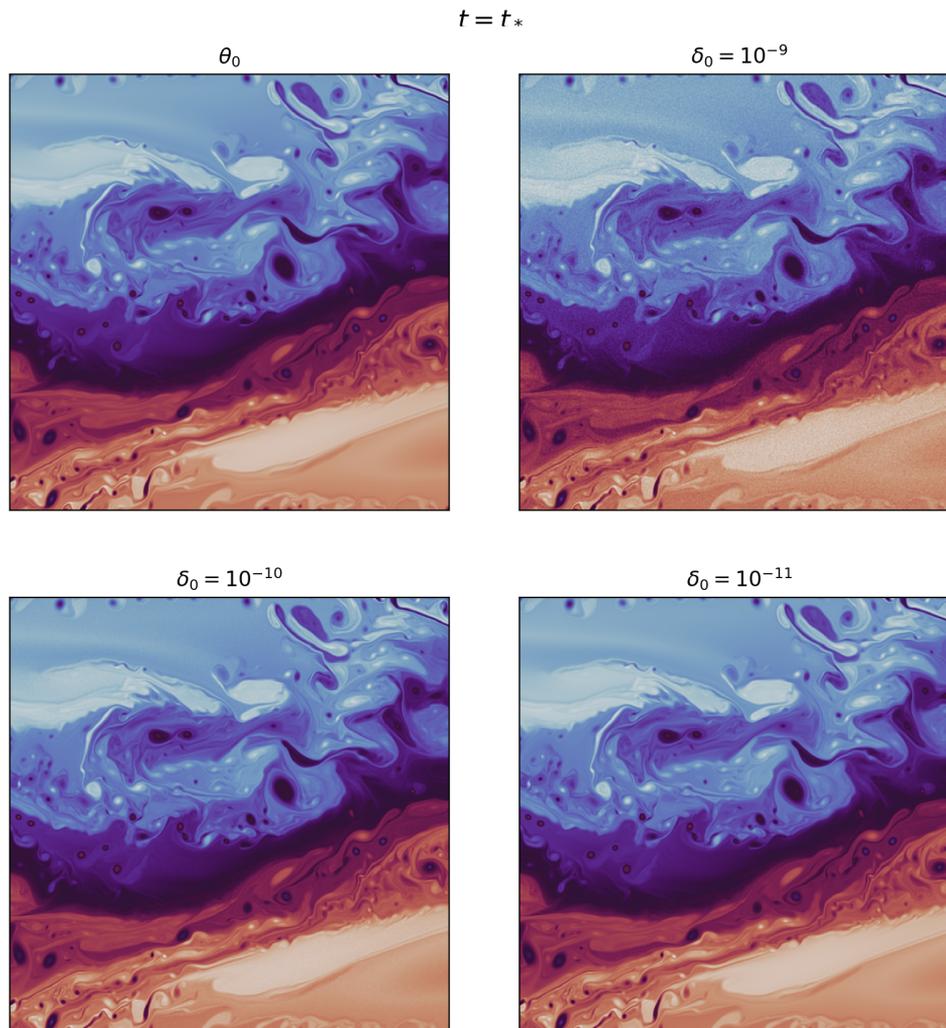


Figure 30: Quart du domaine simulé à $t = t_p$ pour différentes amplitudes de la perturbation, $\delta \in [10^{-11}, 10^9]$. En haut à gauche, est présentée la solution non perturbée. En comparaison avec les figures 19, les champs présentent d'avantage de tourbillons, de taille plus petites, mais moins de filaments de taille moyenne, qui se sont éventuellement déjà destabilisés.

De plus, la figure 32 à gauche présente les spectres initiaux associés aux différentes perturbations tandis que sur la figure 33 sont représentés les spectres d'énergie de la différence entre les solutions perturbées et la solution de base. Nous pouvons voir que, pour $\delta < 10^{-10}$ la différence entre les

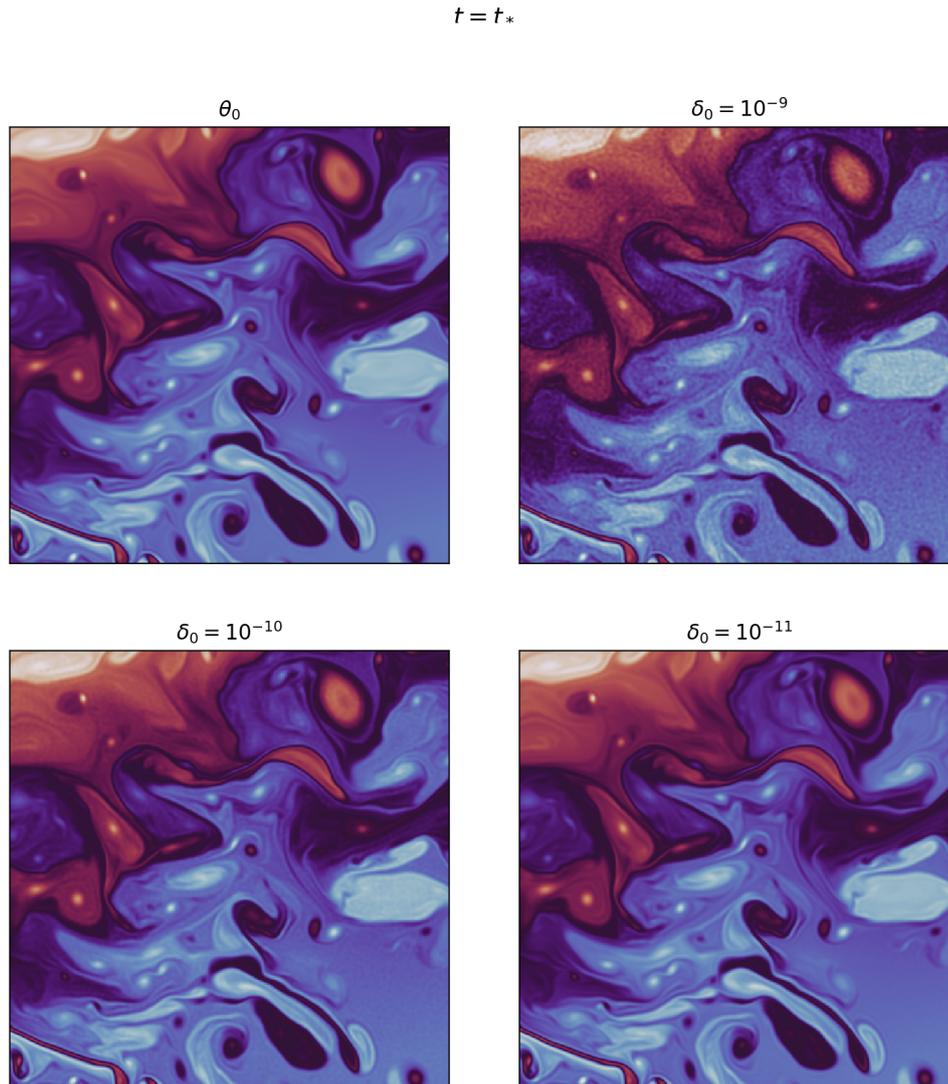


Figure 31: Même description que pour 30 pour pour un sous domaine de 1/16 de la boîte totale.

spectres est plus faible que la valeur de l'énergie pour tous les modes jusqu'à k_η . Les champs sont donc initialement extrêmement proches, indiscernables au niveau macroscopique et même jusqu'à la taille des plus petites structures de l'écoulement. En revanche, le cas $\delta = 10^{-7}$ semble sur-dimensionné et les simulations sont initialement trop différentes pour donner des résultats intéressants.

4.2.3 Résultats et divergence des champs

Spectres de la différence:

Ainsi, les figures 32 et 33 présentent des spectres, ou des spectres des différences des champs de température à t_p , $t_p + 10$ et $t_p + 20$. Notons que le temps caractéristique de retournement

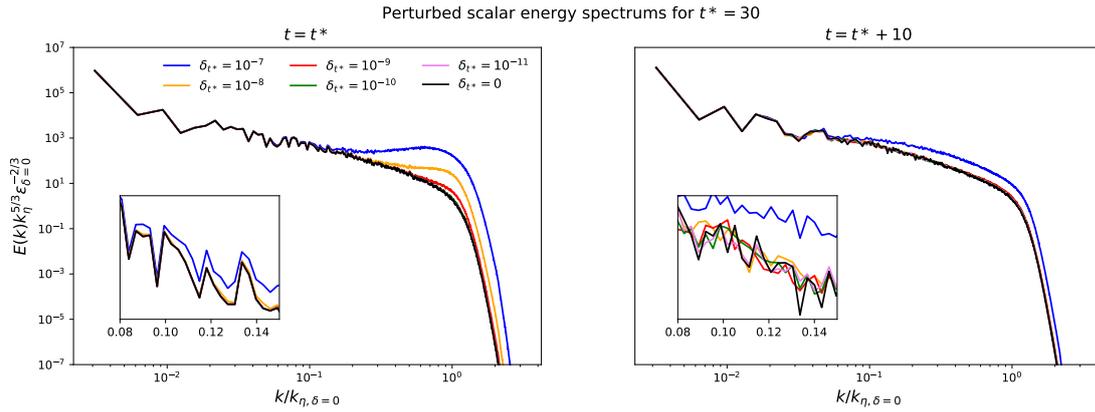


Figure 32: Spectre de l'énergie de surface pour les différentes simulations hyper-visqueuses. Insert : agrandissement autour des modes $k_{\eta}/10$. En noire, la solution non perturbée. A gauche : spectres initiaux à t_p . A droite: spectres à $t = t_p + 10$ et $\tau_r \approx 10$ avec τ_r le temps de retournement des grandes échelles.

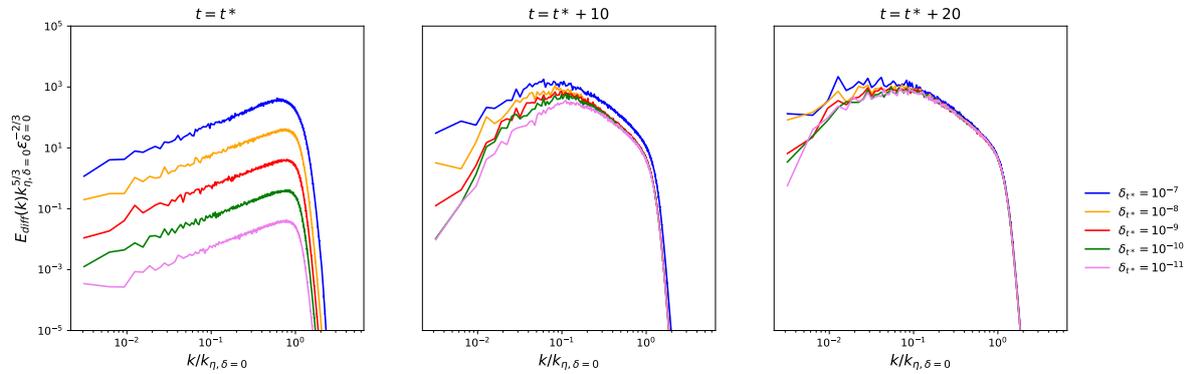


Figure 33: Spectre de l'énergie de la différence entre les solutions perturbées et la référence pour $t = t_p$, $t \approx t_p + \tau_r$ et $t \approx t_p + 2\tau_r$.

des grandes échelles (temps caractéristique de la turbulence à partir de Kolmogorov 41) est de l'ordre de $\tau_r \approx 10$.

Nous pouvons alors observer que les différences, initialement concentrées aux grands modes, voire indiscernables dans les spectres, remontent progressivement aux échelles plus grandes. En effet, dans la figure 32, les encadrés représentent un agrandissement des spectres aux échelles 10 fois plus grandes que l'échelle de Kolmogorov. Nous pouvons voir que, si pour $\delta < 10^{-8}$, aucune différence n'était perceptible à t_p , les courbes semblent indépendantes, fluctuant autour d'une pente moyenne en $k^{-5/3}$. De plus, les spectres des différences ont convergés à ces échelles vers une même courbe limite, dont l'amplitude ne dépend pas la valeur initiale de la perturbation (sauf pour $\delta = 10^{-7}$ à ne pas prendre en compte). Ainsi, la différence entre les solutions, initialement concentrée aux petites échelles est emportée par les effets non linéaires et remonte à des échelles supérieures. De plus, la pente de la courbe limite observée sur la figure 33 est proche de $k^{-5/3}$ et les structures à ces échelles se décorrèlent de la solution non perturbée.

Cela se traduit par des différences macroscopiques sur les champs comme nous pouvons le voir sur les cartes de la figure 34 à $t = t_p + 20$. Si l'écoulement de base aux grandes échelles reste le même, la position, le nombre et la forme des tourbillons sont largement différents, à des échelles bien plus grandes que celle de Kolmogorov.

Ainsi, entre t_p et $t_p + 10$, l'énergie de la différence remonte vers les grandes échelles

$$t = t_* + 2\tau_r$$

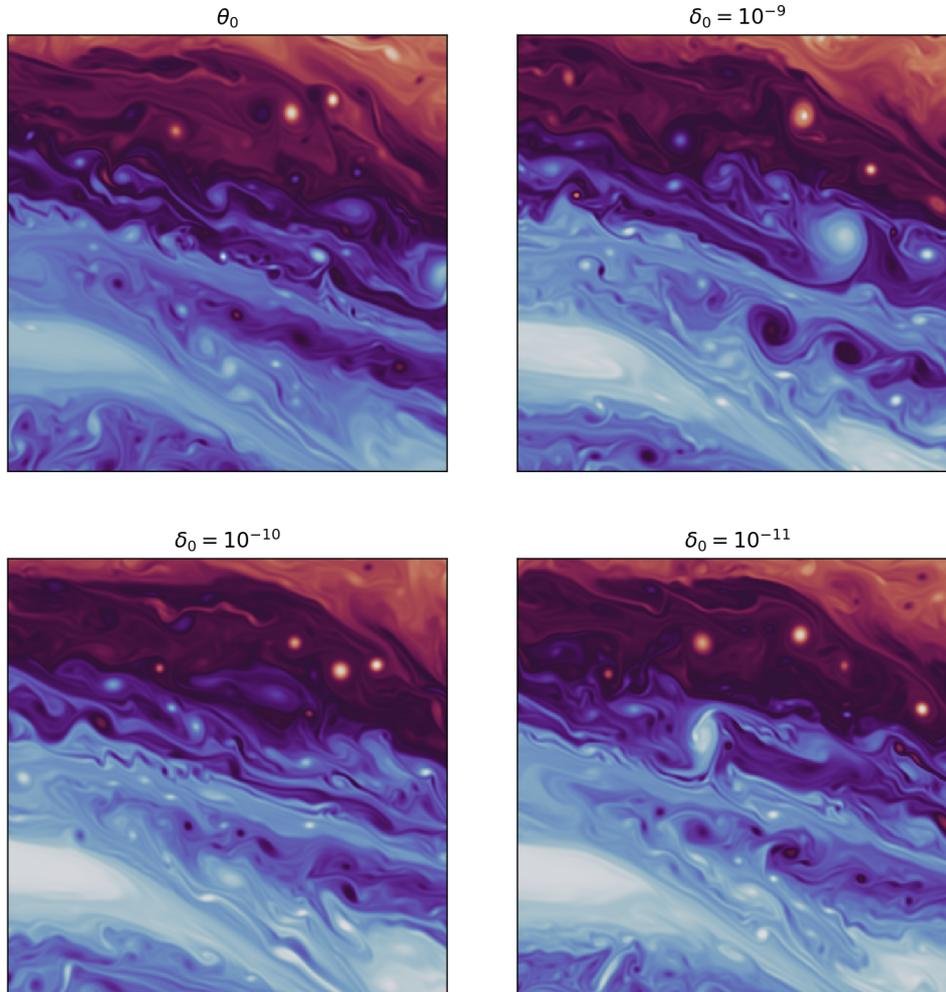


Figure 34: Champs de température pour le même sous domaine que dans la figure 31. Nous pouvons voir des différences notables entre les champs perturbés et de base, à des échelles bien plus grande que η , et même pour la valeur la plus faible de la perturbation.

en convergeant vers une courbe limite déterminée par les effets non linéaires et dont la pente est proche de $k^{-5/3}$.

En revanche, **nous nous attendions à ce que cette phénoménologie persiste entre $t_* + 10$ et $t_* + 20$** et ce que les spectres des différences se "déroulent" suivant cette même pente jusqu'aux très grandes échelles de l'écoulement. Cette intuition vient du caractère "presque" auto-similaire de la cascade directe et de la "presque" invariance d'échelle dans la zone inertielle. **Ce n'est pas ce que nous observons.** Entre $t_* + 10$ et $t_* + 20$, les spectres des différences convergent pour les faibles valeurs de δ . Même si de l'énergie des différences a atteint les grandes échelles, elle reste minoritaire et de deux ordres de grandeurs inférieure à celle atteinte en $l_{max} = 10\eta$. **Si la phénoménologie attendue avait eu lieu, les spectres n'auraient pas cette forme et**

la différence des champs de température au niveau macroscopique aurait été bien plus grande. C'est étonnant.

De plus, l'échelle où intervient cette rupture l_{max} , correspond à celle à laquelle commence réellement la pente en $k^{-5/3}$ et où le transfert spectral respecte effectivement la règle des 2. Comme pour les statistiques lagrangiennes, l'écoulement turbulent issu de la condition initiale de Constantin et al. donne un résultat surprenant (où à minima en désaccord avec nos intuitions), dont le lien avec la stabilité des grandes structures et des fronts, qui confine la turbulence en paquet inhomogènes, doit être étudié plus en détail.

Divergence en norme L^p :

Finalement, nous pouvons observer la divergence des solutions en utilisant la norme L^p de la différence entre les champs de température.

En cohérence avec l'analyse sur les spectres et aux résultats étranges obtenus pour la stochasticité spontanée lagrangienne, nous n'observons pas clairement un comportement spontanément stochastique eulérien.

En effet, d'après les figures 35 et 36 la croissance de la différence en norme L^2 semble comporter plusieurs phases distinctes :

1. Premièrement entre $[t_p, t_p + 1]$, une phase transitoire de croissance pour les simulations avec une perturbation les plus faibles.
2. ensuite pour $t \in [t_p + 1, t_p + 4]$, une phase de croissance exponentielle (cf. figure 35 qui semble observée dans chacune des simulations sauf pour $\delta = 10^{-8}$ où la perturbation est certainement trop grande.
3. une phase de croissance non linéaire jusqu'à $t_p + 20$
4. enfin, l'énergie de la différence sature vers une valeur limite.

Ainsi, nous observons sur la figure 36 à gauche qu'il n'y a pas d'intervalle de valeurs δ et de t tel que la différence entre les champs de température soit indépendante de la différence initiale (pas de superposition des courbes avant saturation). Cela se voit d'avantage sur la partie droite de la figure qui représente, pour différents temps, la norme de la différence en fonction de l'amplitude du bruit initiale. Aucun plateau n'est identifiable avant $t_* + t \approx t_* + 20$.

Cependant, si l'on renormalise ces courbes par $\|\theta_\delta - \theta_0\|_{L^2(0)}$, l'évolution dans la phase non linéaire n'est pas proportionnelle à la différence initiale (cf. figure 37 à gauche). L'information de la perturbation initiale est donc partiellement perdue avant même la saturation, ce qui se distingue d'un système chaotique classique. Nous pouvons alors éventuellement observer une convergence des courbes dans l'intervalle de temps non linéaire en les renormalisant par $(\|\theta_\delta - \theta_0\|_{L^2(0)})^r$ avec $r \approx 3/5$, cf. figure 37 droite.

Enfin, nous nous sommes demandés si la norme L^2 était le bon choix pour visualiser la stochasticité spontanée. En effet, une norme d'ordre plus élevée pourrait donner plus de poids aux événements "violents" et aux séparations explosives, et qui permettrait alors de visualiser la divergence explosive entre les solutions associés aux structures instables et singulières (ces normes pourrait également absorber les zones "laminaires" de notre écoulement non homogène). La figure 38 présente les résultats obtenus pour l'ensemble des normes, de L^2 à L^{10} . Les résultats sont équivalents à ceux pour la norme L^2 et ne nous apportent pas plus d'éclairage.

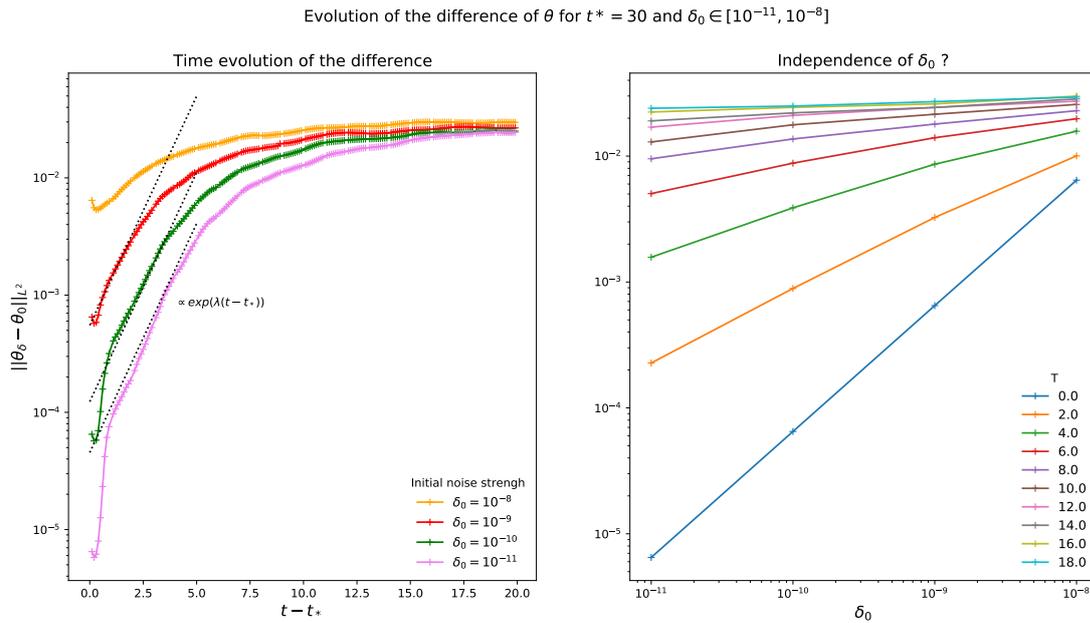


Figure 35: Gauche : Évolution en fonction du temps après la perturbation $\tau = t - t_p$ de la norme L^2 des différences entre le champ de température de base et les champs perturbés. L'axe des ordonnées est en échelle logarithmique.

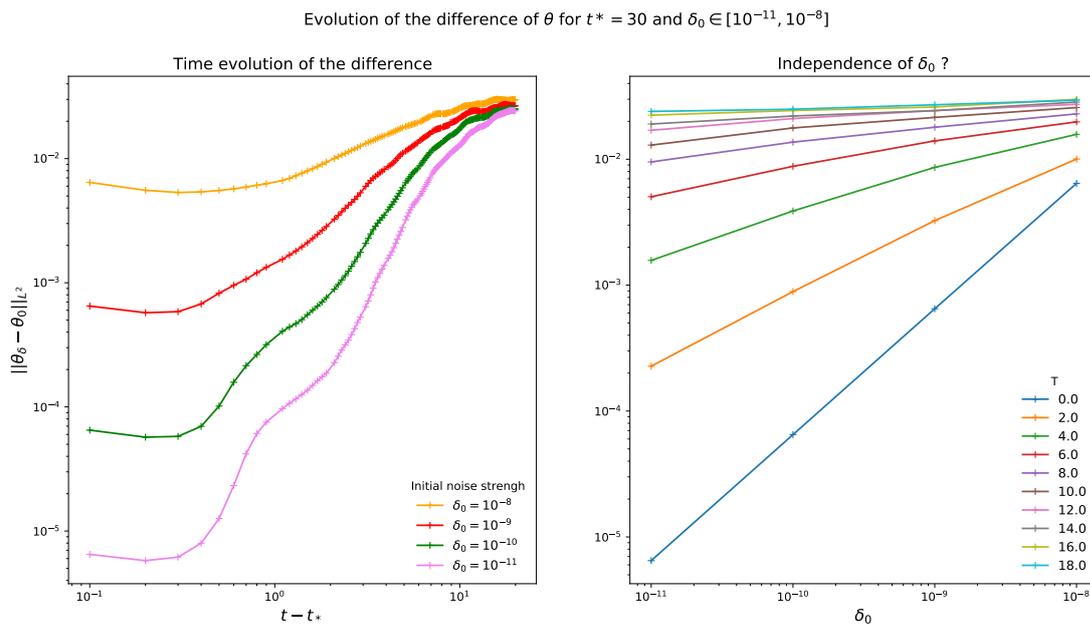


Figure 36: Même quantités que pour fig. 35. L'axe des ordonnées et des abscisses sont en échelle logarithmique.

Conclusion de la partie

Il semble clair à partir des observations sur les spectres et les différences des champs en norme L^2 que la perturbation semble conserver une influence tout au long de la dynamique de l'écoulement de Constantin. Néanmoins, cette dépendance est plus faible que pour un système chaotique classique.

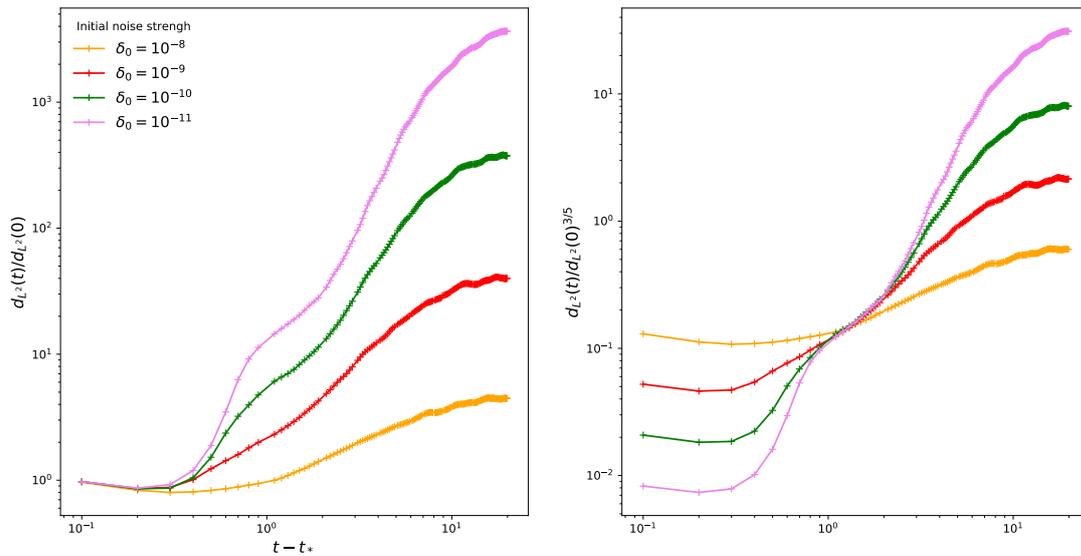


Figure 37: Même quantités que pour fig. 36 à gauche. Les courbes sont renormalisées par la valeur initiale de la séparation des solutions $d_{L^2}(0)$ à la puissance $\alpha = 1$ et $\alpha = 3/5$.

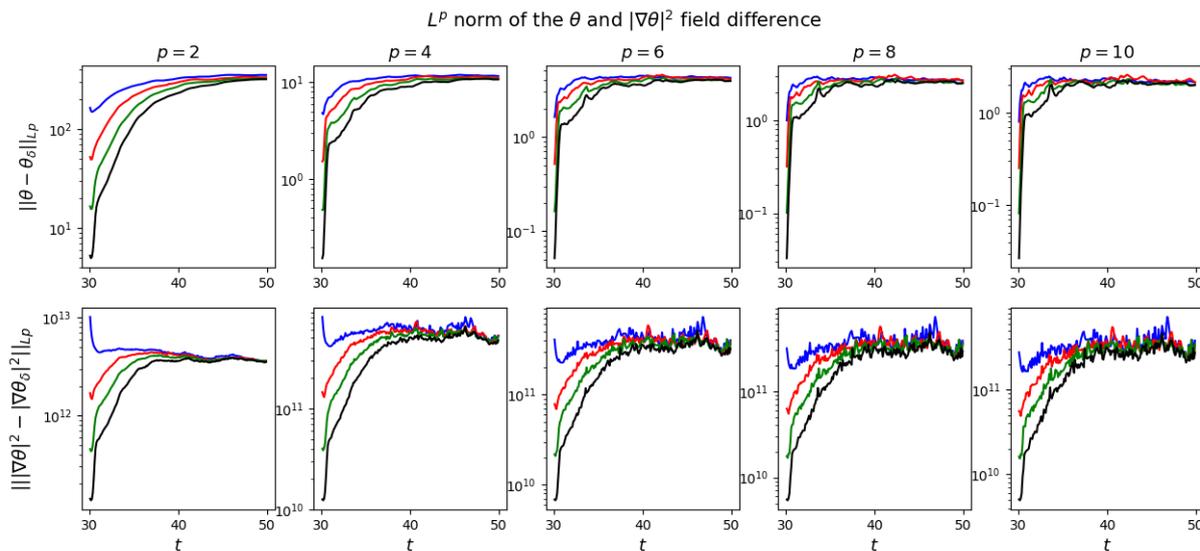


Figure 38: Évolution de la norme L^p de la différence des champs de température en fonction de $t - t_*$ pour $p \in [2, 10]$.

S'il y a bien de la stochasticité spontanée Eulérienne, cette dernière est contenue et bornée aux petites échelles et ne semble pas se propager aux grandes échelles qui portent l'essentielle de l'énergie. Cela peut venir de la condition initiale de Constantin dont la stochasticité spontanée lagrangienne était déjà discutée bien que pourtant théoriquement présente.

En effet, l'écoulement est non homogène, et les statistiques peuvent être "polluées" par des zones lisses, non spontanément stochastiques. L'utilisation de simulations hyper-visqueuses nous a permis d'obtenir plus d'une décade supplémentaire où les phénomènes non linéaires sont prépondérants, et où les échelles associées sont bien inférieures à celles de l'écoulement inhomogène. De plus, au regard de la figure 33, la dynamique de la différence dans cette gamme

d'échelle est bien celle attendue, i.e. la remontée de l'énergie de proche en proche des petites vers les grandes échelles en convergeant en temps fini vers des courbes maîtresses limites qui ne dépendent pas de l'amplitude de la perturbation initiale. Ces échelles semblent donc connaître un comportement spontanément stochastique, qui s'arrête pour une échelle critique $l \approx 10\eta$.

Ainsi, nos travaux ne peuvent pas conclure sur la présence ou non de stochasticité spontanée eulérienne dans les équations SQG mais engage à de nouvelles études en partant de conditions initiales différentes, éventuellement avec un forçage aux grandes échelles. Différents protocoles peuvent également être envisagés, comme l'ajout d'un bruit thermique (prépondérant aux échelles infra-Kolmogorov) présent à chaque pas de temps. C'est une perturbation plus forte et moins contrôlée que le protocole que nous avons suivi ici, mais qui renseigne également physiquement sur l'influence des échelles inférieures à celle de Kolmogorov sur la dynamique macroscopique de l'écoulement.

5 Conclusion et perspectives

Conclusion:

Durant mon stage, que je vais poursuivre en doctorat à partir d'octobre, il m'a été proposé d'étudier la prédictibilité dans les équations hydrodynamiques et plus particulièrement sur les équations de Surface Quasi Géostrophiques. Ces dernières représentent en deux dimensions l'évolution de la température de surface dans un écoulement fortement stratifié et en rotation rapide. Elles sont notamment utilisées dans l'étude du mouvement de la surface des océans. De plus, de part les similitudes avec les propriétés mathématiques et turbulentes des équations de Navier-Stokes, le système SQG a été au centre de nombreuses études par des mathématiciens et des physiciens de la turbulence au cours de ces dernières années.

La perte radicale de prédictibilité aussi appelée "réel effet papillon" ou "stochasticité spontanée", introduite par Lorenz en 1969 [3], est liée à la présence de singularités, i.e. non dérivabilités des solutions, ou quasi singularités dans les systèmes dynamiques. Dans ce cas, la différence entre deux solutions explose en temps fini et est infiniment moins prédictible que la croissance exponentielle de la différence des systèmes chaotiques classiques.

Ainsi, dans ce rapport, nous avons commencé par rappeler les principaux résultats mathématiques établis pendant ces 30 dernières années quant à l'existence, l'unicité et surtout l'apparition d'une singularité des champs de température et de vitesse. Ensuite, nous avons étudié les propriétés du régime turbulent à l'aide de simulations directes des équations SQG forcées. Nous avons montré la présence d'une cascade directe quasi-autosimilaire, aux statistiques proches de la phénoménologie de Kolmogorov 1941 [9]. La pente des spectres est proche de $-5/3$ ou plus pentue contrairement à ce qui avait pu être identifié par Watanabe et al. [40] mais en cohérence avec Celani et al. [41] et Pierrehumber et al. [42]. Les statistiques de la cascade semblent alors assez dépendantes de la manière dont le forçage est fait et dont l'énergie qui remonte aux grandes échelles est traitée. De plus, nous avons montré que la cascade directe est intermittente à partir des statistiques des incréments de température et du champ de dissipation de l'énergie de surface. Par ailleurs, la phénoménologie de Kolmogorov 1962 [44] est effectivement respectée dans nos simulations SQG, i.e. la distribution de la dissipation est approximé pour les événements typiques par une loi log-normal.

Ensuite nous avons débuté l'étude de la prédictibilité des équations SQG à partir de la condition initiale de Constantin et al. [11]. En effet, nous espérons qu'une singularité apparaisse en temps fini et souhaitons étudier la stochasticité spontanée eulérienne (impredictibilité des champs) au voisinage du temps singulier pour le problème régularisé. Cependant, cette condition initiale

ne semble pas conduire à une singularité. En revanche, nous avons observé que la dissipation converge vers une valeur limite non nulle lorsque la viscosité tend vers 0 à partir d'un temps t_* . Cette anomalie dissipative est en réalité associée à un régime turbulent dont les statistiques sont proches de celles présentées dans la partie II. Aussi, Gawedzki [45] et Drivas [50] ont montré que l'anomalie dissipative est liée à la mauvaise définition des trajectoires des particules fluides de l'écoulement : c'est la stochasticité spontanée lagrangienne. Nous avons alors effectué des statistiques lagrangiennes à partir de nos simulations. Les résultats ne sont pas clairs, bien que très fortement attendus car appuyés théoriquement. Les trajectoires sont plus dispersives que pour un système chaotique classique mais ne présentent pas directement un comportement spontanément stochastique. Les écarts avec la phénoménologie attendue peuvent éventuellement s'expliquer par le fait que l'écoulement turbulent présente des grandes structures inhomogènes et stable. La turbulence semble donc confinée entre ces domaines. La prise en compte dans les statistiques (moyennes) de ces sous domaines stables peut "polluer" nos résultats. Dans les prochains semaines, nous allons alors refaire ces statistiques en les conditionnant sur les zones de fortes dissipations.

Enfin, nous avons débuté l'étude de la stochasticité spontanée Eulérienne en perturbant les solutions hyper-visqueuses issues de la condition initiale de Constantin à un temps t_p du régime turbulent. Comme pour l'étude lagrangienne, les résultats sont à mi-chemin et ne permettent pas de conclure, même en changeant la norme avec laquelle nous caractérisons la divergence des solutions. Pourtant, pour les petites échelles, nous observons la bonne phénoménologie sur plus d'une décade avant que la remontée vers les grandes échelles de la différence entre les champs de température ne soit bloquée.

Notre étude est donc prometteuse car il semblerait que les solutions SQG présentent des comportements explosifs bien que pour les simulations que nous avons faites ces derniers soient supposés statistiquement cachés.

Perspectives :

Ainsi dans les prochains mois, nous allons d'abord poursuivre l'étude lagrangienne à partir de la condition initiale de Constantin sur le lien entre anomalie dissipative et stochasticité spontanée d'un scalaire actif. Si les résultats conditionnés permettent d'identifier clairement la dispersion explosive des trajectoires dans la limite turbulent, cette étude originale devrait conduire à l'écriture d'un article.

Ensuite, nous avons présenté en partie II des statistiques de la turbulence SQG. A notre connaissance, il n'y a pas d'études orientées physique de la turbulence qui regrouperait l'ensemble des statistiques turbulentes (Kolmogorov 41, Kolmogorov 62, fonctions de structures, exposant anormal, Multi-fractal, ...) et leur stabilité pour les différents types de forçage et traitement des grandes échelles. De plus, il serait intéressant de regarder les liens entre ces statistiques, les structures de l'écoulement, leur stabilité et le lien avec la dispersion lagrangienne ou divergence des solutions. L'objectif serait alors de caractériser la stochasticité spontanée. Pour faire ces études, il sera sans doute nécessaire de pouvoir faire des simulations numériques encore mieux résolus. Le code actuel est parallélisable en "multi-threading". Nous pourrions le modifier pour qu'il soit parallélisable sur plusieurs processeurs (MPI) mais je préférerais écrire mon propre code, en Julia. Un des avantages d'utiliser un système 2D, c'est que les simulations devraient alors pouvoir être lancées sur GPU et ainsi nous permettre de faire des simulations avec des résolutions 10 à 20 fois supérieures tout en gardant des temps de calcul raisonnables.

Dans un autre registre, il serait intéressant de s'attarder sur les équations de Burgers. En effet, si la dynamique forward est parfaitement stable et non chaotique, il semble que la dynamique eulérienne backward soit spontanément stochastique. En effet, les fronts font "disparaître l'information

de se qui y est rentrée". Ainsi, il semble que plusieurs solutions différentes soient possibles à partir d'une même condition initiale dans la double limite, régularisation vers 0, puis bruit vers 0 en allant à rebrousse temps. L'avantage des équations de Burgers et qu'elles sont traitables analytiquement. L'objectif serait donc de poser proprement la stochasticité spontanée eulérienne backward dans les équations de Burgers.

Enfin, le modèle de Lorentz 1969 [3] donne l'intuition que les équations SQG sont spontanément stochastiques. De la même manière, il devrait être possible d'obtenir une telle preuve dans les modèles en couche de SQG, en suivant la méthodologie de A. Mailybaev [47].

Références

- [1] Edward N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of Atmospheric Science*, 1963.
- [2] POINCARÉ : Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle, 1881-1886 + ...
- [3] Edward N. Lorenz. The predictability of a flow which possesses many scales of motion. *Tellus*, 21(3) :289–307, June 1969.
- [4] Bérengère Dubrulle. Turbulence - Lecture notes for the M2 Soft Matter, 2022.
- [5] Jeremie Bec and Konstantin Khanin. Burgers Turbulence. *Physics Reports*, 447(1-2) :1–66, August 2007. arXiv :0704.1611 [nlin].
- [6] Marcel Lesieur. *Turbulence in Fluids*. Springer-Verlag New York Inc., Dordrecht, 4th, rev. and enlarged ed. 2008 édition edition, 2007.
- [7] U. Frisch and A. N. Kolmogorov. *Turbulence : the legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, Cambridge, [Eng.] ; New York, 1995.
- [8] Lewis Fry Richardson. *Weather prediction by numerical process*. The University press, Cambridge, 1922. Open Library ID : OL7095124M.
- [9] A. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds' Numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 30 :301–305, January 1941. ADS Bibcode : 1941DoSSR..30..301K.
- [10] Simon Thalabard, Jérémie Bec, and Alexei Mailybaev. From the butterfly effect to spontaneous stochasticity in singular shear flows. *Communications Physics*, 3 :122, 2020. Publisher : Nature Research.
- [11] P. Constantin, A. J. Majda, and E. Tabak. Formation of strong fronts in the 2-D quasigeostrophic thermal active scalar. *Nonlinearity*, 7(6) :1495–1533, November 1994. Publisher : IOP Publishing.
- [12] Isaac M. Held, Raymond T. Pierrehumbert, Stephen T. Garner, and Kyle L. Swanson. Surface quasi-geostrophic dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, 282 :1–20, January 1995.
- [13] Non-equilibrium Statistical Mechanics and Turbulence (London Mathematical Society Lecture Note Series Book 355) (English Edition) eBook : Cardy, John, Falkovich, Gregory, Gawedzki, Krzysztof, Nazarenko, Sergey, Zaboronski, Oleg V. : Amazon.fr : Boutique Kindle.
- [14] Theodore D. Drivas and Gregory L. Eyink. A Lagrangian fluctuation–dissipation relation for scalar turbulence. Part I. Flows with no bounding walls. *Journal of Fluid Mechanics*, 829 :153–189, October 2017. Publisher : Cambridge University Press.
- [15] William Blumen. Uniform Potential Vorticity Flow : Part I. Theory of Wave Interactions and Two-Dimensional Turbulence. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 35(5) :774–783, May 1978. Publisher : American Meteorological Society Section : Journal of the Atmospheric Sciences.
- [16] Guillaume Lapeyre. Surface Quasi-Geostrophy. *Fluids*, 2(1) :7, February 2017.

- [17] Serge G. Resnick. *Dynamical problems in non-linear advective partial differential equations*. Ph.D., The University of Chicago, United States – Illinois, 1995. ISBN : 9798208417966.
- [18] Tristan Buckmaster, Steve Shkoller, and Vlad Vicol. Nonuniqueness of weak solutions to the SQG equation. Technical Report arXiv :1610.00676, arXiv, October 2016. arXiv :1610.00676 [math] type : article.
- [19] J. T. Beale, T. Kato, and A. Majda. Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations. *Communications in Mathematical Physics*, 94(1) :61–66, January 1984. Publisher : Springer.
- [20] W. Wolibner. Un theoreme sur l’existence du mouvement plan d’un fluide parfait, homogene, incompressible, pendant un temps infiniment long. *Mathematische Zeitschrift*, 37 :698–726, 1933.
- [21] Diego Cordoba. Nonexistence of Simple Hyperbolic Blow-Up for the Quasi-Geostrophic Equation. *Annals of Mathematics*, 148(3) :1135–1152, 1998. Publisher : Annals of Mathematics.
- [22] Ramjee Sharma. GEOMETRIC CRITERIA FOR INVISCID 2D SURFACE QUASIGEOSTROPHIC EQUATIONS. page 7.
- [23] Jian Deng, Thomas Y. Hou, Ruo Li, and Xinwei Yu. Level Set Dynamics and the Non-blowup of the 2D Quasi-geostrophic Equation. Technical Report arXiv :math/0601427, arXiv, April 2006. arXiv :math/0601427 type : article.
- [24] Koji Ohkitani and Michio Yamada. Inviscid and inviscid-limit behavior of a surface quasi-geostrophic flow. *Physics of Fluids*, 9(4) :876–882, April 1997. Publisher : American Institute of Physics.
- [25] Peter Constantin, Ming Chih Lai, Ramjee Sharma, Yu Hou Tseng, and Jiahong Wu. New numerical results for the surface quasi-geostrophic equation. *Journal of Scientific Computing*, 50(1) :1–28, January 2012. Publisher : Springer New York.
- [26] A. Castro and D. Córdoba. Infinite energy solutions of the surface quasi-geostrophic equation. *Advances in Mathematics*, 225(4) :1820–1829, November 2010.
- [27] Hang Yang. Blow Up Of A Hyperbolic SQG Model. Technical Report arXiv :1711.01255, arXiv, November 2017. arXiv :1711.01255 [math] type : article.
- [28] Alexander Kiselev and Changhui Tan. Finite time blow up in the hyperbolic Boussinesq system. Technical Report arXiv :1609.02468, arXiv, September 2016. arXiv :1609.02468 [math] type : article.
- [29] José Luis Rodrigo. On the evolution of sharp fronts for the quasi-geostrophic equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(6) :821–866, 2005. eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/cpa.20059>.
- [30] Francisco Gancedo. Existence for the α -patch model and the QG sharp front in Sobolev spaces. *Advances in Mathematics*, 217(6) :2569–2598, April 2008.
- [31] R. K. Scott and D. G. Dritschel. Numerical Simulation of a Self-Similar Cascade of Filament Instabilities in the Surface Quasigeostrophic System. *Physical Review Letters*, 112(14) :144505, April 2014. Publisher : American Physical Society.

- [32] Martin Juckes. Instability of Surface and Upper-Tropospheric Shear Lines. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 52(18) :3247–3262, September 1995. Publisher : American Meteorological Society Section : Journal of the Atmospheric Sciences.
- [33] Richard K. Scott. A scenario for finite-time singularity in the quasigeostrophic model. *Journal of Fluid Mechanics*, 687 :492–502, November 2011. Publisher : Cambridge University Press.
- [34] Peter Constantin and Jiahong Wu. Behavior of Solutions of 2D Quasi-Geostrophic Equations. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 30(5) :937–948, January 1999.
- [35] A. Kiselev, F. Nazarov, and A. Volberg. Global well-posedness for the critical 2D dissipative quasi-geostrophic equation. *Inventiones mathematicae*, 167(3) :445–453, March 2007.
- [36] Jiahong Wu. Inviscid limits and regularity estimates for the solutions of the 2-D dissipative quasi-geostrophic equations. 1997.
- [37] Luigi C. Berselli. Vanishing Viscosity Limit and Long-time Behavior for 2D Quasi-geostrophic Equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 51(4) :905–930, 2002. Publisher : Indiana University Mathematics Department.
- [38] Ouellette Phys Fluids Jahanshah Davoudi Jörg Schumacher Salvatore Lovecchio Università Dipartimento Rivera Interacté, Chen. turbulent open channel flow - ppt video online download.
- [39] Philip Isett and Vlad Vicol. Hölder Continuous Solutions of Active Scalar Equations. *Annals of PDE*, 1(1) :2, December 2015.
- [40] Takeshi Watanabe and Takahiro Iwayama. Unified Scaling Theory for Local and Non-local Transfers in Generalized Two-dimensional Turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan*, 73(12) :3319–3330, December 2004. Publisher : The Physical Society of Japan.
- [41] celani cencini active and passive fields face to face - Recherche Google.
- [42] Raymond T. Pierrehumbert, Isaac M. Held, and Kyle L. Swanson. Spectra of local and nonlocal two-dimensional turbulence. *Chaos, Solitons & Fractals*, 4(6) :1111–1116, June 1994.
- [43] Surface kinetic and potential energy transfer in SQG dynamics.
- [44] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 13(1) :82–85, May 1962. Publisher : Cambridge University Press.
- [45] Krzysztof Gawedzki and Massimo Vergassola. Phase Transition in the Passive Scalar Advection, November 1998. arXiv :cond-mat/9811399.
- [46] Theodore D. Drivas and Alexei A. Mailybaev. "Life after death" in ordinary differential equations with a non-Lipschitz singularity. *Nonlinearity*, 34(4) :2296–2326, April 2021. arXiv :1806.09001 [math-ph].
- [47] Alexei A. Mailybaev. Blowup as a driving mechanism of turbulence in shell models. *Physical Review E*, 87(5) :053011, 2013. Publisher : APS.

- [48] Richard Rotunno and C. Snyder. A Generalization of Lorenz's Model for the Predictability of Flows with Many Scales of Motion. *Journal of The Atmospheric Sciences - J ATMOS SCI*, 65, March 2008.
- [49] Alexis Foussard, Stefano Berti, Xavier Perrot, and Guillaume Lapeyre. Relative dispersion in generalized two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 821 :358–383, June 2017. Publisher : Cambridge University Press (CUP).
- [50] Theodore Dimitrios Drivas. Anomalous Dissipation, Spontaneous Stochasticity & Onsager's Conjecture. page 306.
- [51] Instability of surface-temperature filaments in strain and shear - Harvey - 2010 - Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society - Wiley Online Library.

I Annexes

A Instabilité Filament

Comme décrit dans la partie II, un patch de température en forme de filament allongé correspond à un écoulement cisailé et, comme pour les équations de Navier Stokes, est associé à une instabilité (Kelvin Helmholtz pour Navier Stokes).

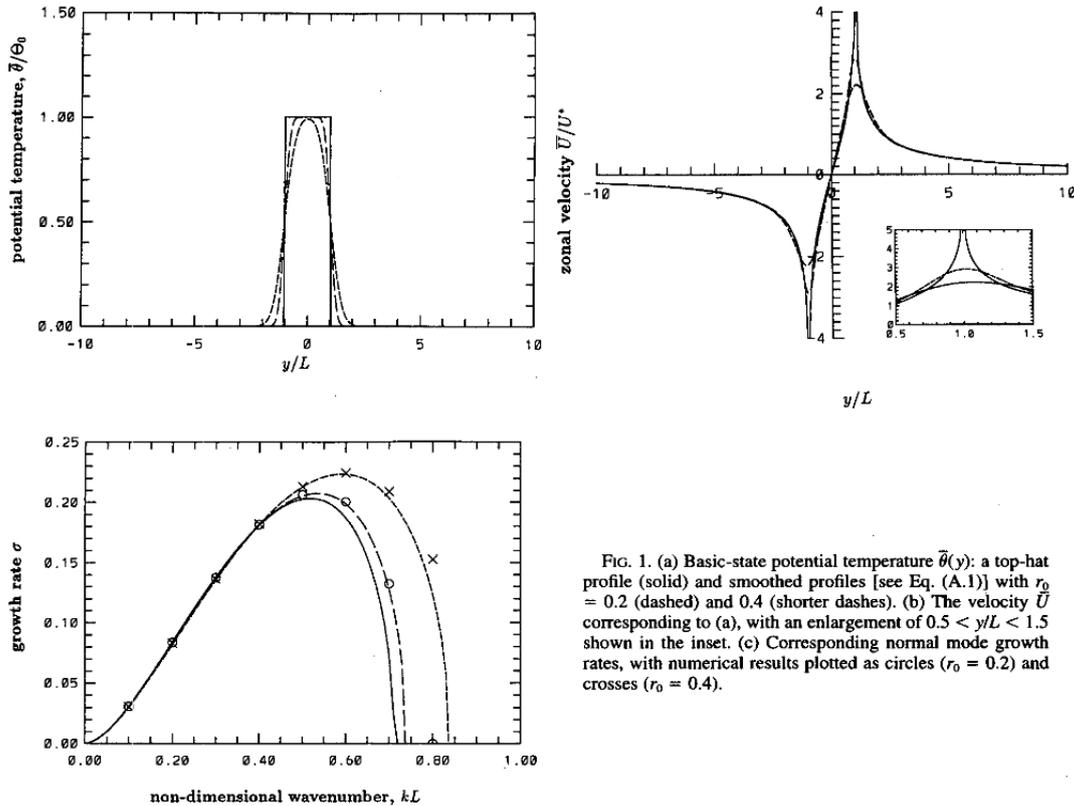


FIG. 1. (a) Basic-state potential temperature $\bar{\theta}(y)$: a top-hat profile (solid) and smoothed profiles [see Eq. (A.1)] with $r_0 = 0.2$ (dashed) and 0.4 (shorter dashes). (b) The velocity \bar{U} corresponding to (a), with an enlargement of $0.5 < y/L < 1.5$ shown in the inset. (c) Corresponding normal mode growth rates, with numerical results plotted as circles ($r_0 = 0.2$) and crosses ($r_0 = 0.4$).

FIGURE 39 : Fig 1 de Jukes [32]. En haut à gauche : profil initial du filament de température. En bas à gauche : taux de croissance de l'instabilité en fonction du mode de la perturbation pour les différentes formes de filament. A droite : profil de vitesse associé au filament. Dans le cas d'un filament discontinu, la vitesse diverge vers l'infinie aux discontinuité de θ .

La figure 39 en haut à gauche, montre différents profils de filaments, singuliers ou régularisés. Lorsque le filament à la forme d'un "chapeau haut de forme", i.e. le filament singulier, nous pouvons calculer le champs de vitesse analytiquement et, bien que $\int u^2 = \int \theta^2 < \infty$, la vitesse diverge au niveau de la discontinuité de température. Cependant, l'instabilité et son taux de croissance restent bien définis et cela ne pose pas de problème dans l'analyse aux perturbation linéaire. Lorsque que le profil du filament est régularisé, la divergence de la vitesse redevient bornée mais l'écoulement reste cisailé (cf. figure 39 à droite), donc instable.

Nous ne présentons pas ici le détail de l'analyse de stabilité linéaire qui se trouve dans [32]. Nous remarquons que juste que :

1. Cette configuration est instable pour un nombre fini de mode tel que $\sigma_m = a\delta$ et $k_c = b\delta$ où σ_m est le taux de croissance maximal de l'instabilité, δ l'épaisseur du filament, k_c le mode de coupure tel que $\sigma = 0$ et a et b des constantes qui dépendent de la forme initiale du filament (voir figure 39). Ainsi, la configuration est instable pour des perturbations

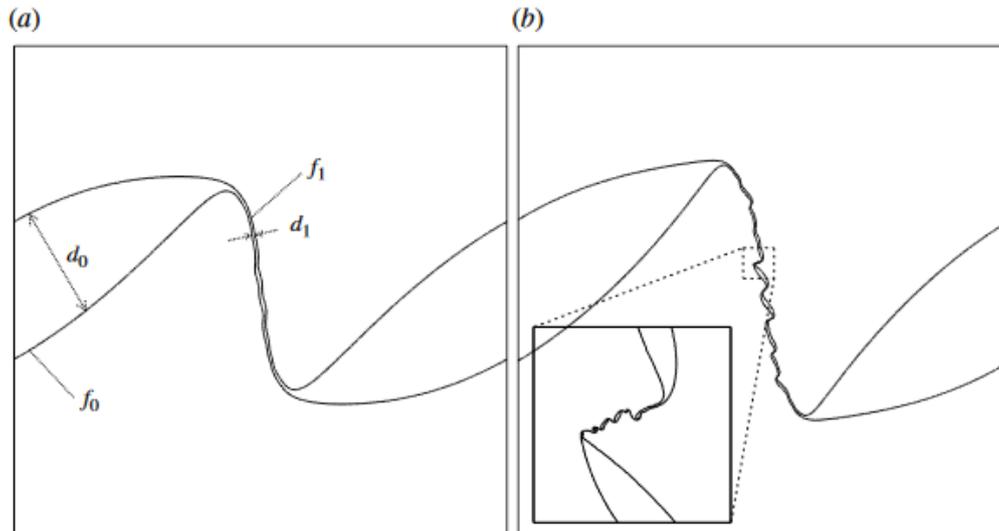


FIGURE 40 : Fig 3 de Scott [33]. Évolution du filament primaire. Il se déstabilise et crée alors des filaments fils qui se déstabilisent à leur tour.

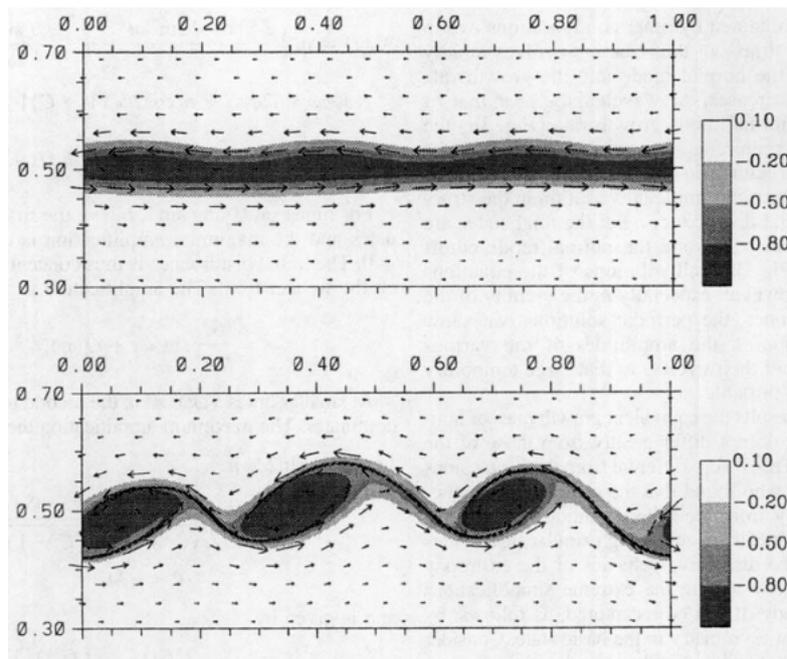


FIGURE 41 : Fig 4 de Juckes [32] Champ de température d'une filament perturbé.

aux grandes échelles et maximal pour des longueurs d'onde comparable à l'épaisseur du filament. Les grands modes sont en revanche stabilisés, même dans le cas du filament irrégulier. Ce n'est pas le cas avec l'instabilité de Kelvin-Helmoltz pour les équations de Navier Stokes.

- Comme nous pouvons le voir dans les figures 40 et 41 issues de [32] et [33], après s'être développé dans le régime linéaire, l'instabilité donne lieu à des tourbillons elliptiques dont la taille caractéristique est égale à celle de l'épaisseur du filament. Entre ses tourbillons, le filament originel n'est pas coupé et on le retrouve sous la forme de nouveaux filaments dont l'épaisseur est environ 40 fois inférieure. Ce dernier est également instable et le phénomène peut recommencer. Cela donne alors lieu à une cascade d'instabilité formant des structures

de plus en plus faible et dont le taux de croissance est de plus en plus rapide. Ainsi, une singularité apparaîtrait en temps fini (voir figure 5).

3. Dans le cas d'un profil initial régularisé, qui est par ailleurs la forme des filaments présents dans les écoulements turbulents visqueux, l'instabilité primaire a également lieu. En revanche, la forme du filament "fils" n'est pas la même que celui du filament primaire et est plus piqué 42. Cette configuration reste néanmoins instable et donnera à son tour un filament fils qui aura un profil similaire au sien et une épaisseur également bien moindre. Scott conjecture alors que les profils régularisés, associés à des solutions fortes de SQG inviscide, conduirait également à une cascade d'instabilité en chaîne et donc, à l'apparition d'une singularité en temps fini.
4. Enfin, un tel phénomène n'existe pas dans les équations de Navier Stokes 2D car la relation entre la vorticit   ω et la vitesse u implique un potentiel logarithmique tandis que dans SQG θ et u sont reli  s par un potentiel en $1/x$. Ainsi, les corr  lations sont plus locales dans les   quations SQG et le reste de l'  coulement ne peut pas stabiliser le filament fils comme c'est le cas dans NS-2D [51]

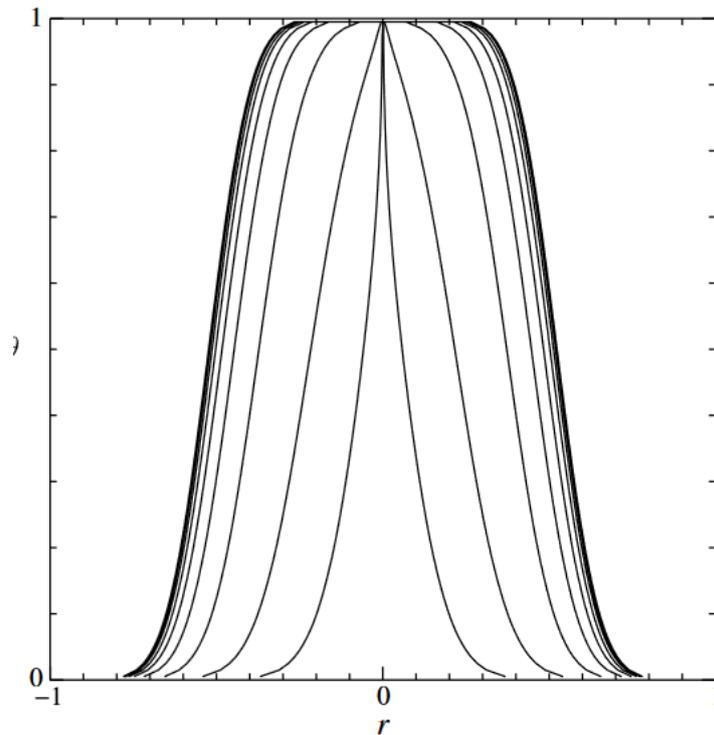


FIGURE 42 : Fig 5 de Scott [33].   volution, de l'ext  rieur au centre, de la forme du filament r  gularis   en fonction du temps. A la fin de la premi  re instabilit  , le filament est fin et "piqu  ". Ce profil ne semble pas d  pendre de la forme initiale du front (non montr   ici) et se maintient ensuite dans les filaments tertiaires et ainsi de suite.

B Karman-Howarth-Monin SQG

L'  quations de Karman-Howarth-Monin d  crit l'  volution de la corr  lation    deux points du champ de temp  rature dans l'espace physique.

Ainsi, nous considérons l'équation de transport dans SQG en x et en $x + r$:

$$\partial_t \theta(x, t) + u(x, t) \nabla_x \theta(x, t) = \nu \Delta_x \theta(x, t) + f(x) \quad (\text{I.1})$$

$$\partial_t \theta(x + r, t) + u(x + r, t) \nabla_{x+r} \theta(x + r, t) = \nu \Delta_{x+r} \theta(x + r, t) + f(x + r) \quad (\text{I.2})$$

Nous allons alors multiplier la première équation par $\theta(x + r)$ et la seconde équation par $\theta(x)$, les additionner puis prendre la moyenne sur l'ensemble de l'écoulement (intégration sur le domain \mathcal{D}). Ainsi, en indiquant d'un ' les grandeurs en $x + r$, nous trouvons :

$$\partial_t \langle \theta \theta' \rangle + \langle \theta' u \nabla \theta + \theta u' \nabla' \theta' \rangle = \nu \langle \theta' \Delta \theta + \theta \Delta \theta' \rangle + \langle f' \theta + f \theta' \rangle \quad (\text{I.3})$$

En supposant que l'écoulement est homogène les quantités précédentes se simplifient telles que :

$$\begin{aligned} \langle f' \theta + f \theta' \rangle &= 2 \left\langle \theta \frac{f(x + r) + f(x - r)}{2} \right\rangle \\ \nu \langle \theta' \Delta \theta + \theta \Delta \theta' \rangle &= \nu \Delta_{\vec{r}} \langle \theta \theta' \rangle \\ \langle \theta' u \nabla \theta + \theta u' \nabla' \theta' \rangle &= -2 \nabla_{\vec{r}} \langle \delta_r \theta^2 \delta_r \vec{u} \rangle \end{aligned}$$

où $\delta_r \theta = \theta' - \theta$ est l'incrément de température suivant \vec{r} .

Ainsi, en divisant pas deux l'équation I.3, et en substituant, nous trouvons l'équation de Karman-Howarth-Monin SQG :

$$\partial_t \frac{1}{2} \langle \theta \theta' \rangle - \frac{1}{4} \nabla_{\vec{r}} \langle \delta_r \theta^2 \delta_r \vec{u} \rangle = \left\langle \theta \frac{f(x + r) + f(x - r)}{2} \right\rangle + \nu \Delta_{\vec{r}} \langle \theta \theta' \rangle \quad (\text{I.4})$$

Tout d'abord, pour $\vec{r} = 0$, nous retrouvons l'équation d'évolution de l'énergie de surface :

$$\partial_t \mathcal{E} = - \underbrace{\nu \mathcal{E}}_{\epsilon} + \mathcal{F} \quad (\text{I.5})$$

avec \mathcal{F} l'énergie apporté par le forçage.

Si nous faisons l'hypothèse que la turbulence est statistiquement stationnaire, alors l'équation I.5 nous donne classiment que $\epsilon = \mathcal{F}$.

Si l'on revient à l'équation de Karman-Howarth-Monin, en supposant la dynamique stationnaire et en se plaçant aux échelles inertielles, i.e. telle que la dissipation est négligeable et que l'énergie est prescrite de manière homogène aux grandes échelles alors l'équation devient :

$$-\frac{1}{4} \nabla_{\vec{r}} \langle \delta_r \theta^2 \delta_r \vec{u} \rangle = \underbrace{\left\langle \theta \frac{f(x + r) + f(x - r)}{2} \right\rangle}_{\epsilon} = \epsilon \quad (\text{I.6})$$

Ainsi, en supposant l'isotropie et en intégrant sur une boule de taille $|\vec{r}| = r$, on trouve **la loi des 2 pour les équations SQG, analogue à la loi des 4/3 pour les équations de Navier Stokes** :

$$\langle (\delta \theta)^2 | \delta u | \rangle = -2\epsilon \quad (\text{I.7})$$