

LICENCE / MASTER SCIENCE DE LA MATIÈRE
École Normale Supérieure de Lyon
Université Claude Bernard Lyon I

Stage 2023–2024
Nathan Bagshaw
L3 Physique

Génération et dynamique d'un dipôle tourbillonnaire

Résumé : Dans le but à termes d'étudier leur collision sur une paroi pour mieux comprendre les équations de Navier-Stokes 2D, ce rapport décrit la méthode expérimentale mise en place pour générer et visualiser des dipôles tourbillonnaires dans un fluide stratifié, puis l'étude de leur forme et de leur déplacement. Dans un premier temps du colorant est utilisé pour visualiser les dipôles, puis une technique de PIV (Particle Image Velocimetry) est mise en place pour avoir accès au champ de déplacement du fluide, pouvoir comparer les dipôles à un modèle analytique et discuter de leurs propriétés auto-similaires.

Mots clefs : *Fluide stratifié, dipôle tourbillonnaire, turbulence 2D, diffusion visqueuse*

Stage encadré par :

Christophe Brouzet et Simon Thalabard

christophe.brouzet@univ-cotedazur.fr / tél. (+33)4 89 15 28 21

simon.thalabard@univ-cotedazur.fr / tél. (+33)4 89 15 27 67

Institut de Physique de Nice (INPHYNI)

17 rue Julien Lauprêtre, 06200 Nice

<https://inphyni.univ-cotedazur.fr>



Table des matières

Introduction	1
1 Dispositif expérimental	2
1.1 Méthode des deux bacs	2
1.2 Mesure de la stratification	3
1.3 Simulation numérique	3
2 Visualisation avec du colorant	4
2.1 Méthode expérimentale	4
2.2 Observations qualitatives	4
2.3 Résultats quantitatifs	6
3 Théorie sur les dipôles tourbillonnaires	8
3.1 Équation du mouvement	8
3.2 Approximation 2D	9
3.3 Dipôle de Lamb-Chaplygin	10
4 Visualisation par PIV	11
4.1 La méthode PIV	11
4.2 Comparaison au modèle de Lamb-Chaplygin	12
4.3 Profil vertical	16
5 Collision avec une paroi	17
Conclusion et perspectives	18
Références	19
Annexe	20

Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe Fluides Complexes du laboratoire INPHYNI pour m'avoir accueilli si chaleureusement et pour m'avoir intégré parmi eux de manière amicale et enrichissante ainsi que pour tout le matériel mis à ma disposition. Merci à mes encadrants Simon Thalabard et Christophe Brouzet pour avoir été si présent et impliqué dans le stage, pour ces discussions passionnantes autour de la turbulence 2D, pour toute l'aide pour monter la manipulation et surtout merci pour m'avoir réellement fait participer à un sujet de recherche et de m'y avoir guidé et appris la démarche. Je ressors de ce stage avec la confirmation que je veux faire ce métier complet et passionnant qu'est la recherche ! Merci également aux autres stagiaires et doctorants pour tous ces moments de convivialité lors des repas ou soirées passées ensemble et aussi pour ces discussions à propos de nos expériences.

Introduction

Nous allons nous intéresser à des paires de vortex quasi-bidimensionnels (quasi-2D), que nous allons générer en injectant un fluide dans un milieu stratifié en densité. Pour former un dipôle il faut en effet donner une impulsion rectiligne dans un milieu 2D. Le jet injecté est la source d'impulsion et la stratification qui a pour effet de ramener un objet à son altitude d'équilibre correspondant à sa densité sert à rendre l'écoulement quasi-bidimensionnel. L'importance de ne pas rester sur un écoulement tridimensionnel vient du fait qu'en 2D il est connu qu'il existe deux invariants quadratiques, l'énergie cinétique et l'enstrophie (moyenne de la vorticité carré), dont la dissipation favorise au cours du temps la création de structure des petites vers les grandes échelles [1] par des mécanismes de déclins et de transferts inverses de l'énergie cinétique, soit l'inverse de la cascade d'énergie qui, en 3D, mélange les grandes structures pour favoriser des plus petites structures.

Les écoulements bidimensionnels sont présents dans la nature, notamment aux grandes échelles telles que les cyclones dans l'atmosphère ou certains courants dans l'océan. Ces structures ont pour particularité d'être quasi bidimensionnelles à cause de la rotation de la Terre mais aussi à cause de la stratification en densité [2]. Il y a donc des applications géophysiques à la compréhension des dipôles tourbillonnaires telle que l'étude la dynamique des courants sous-marins qui sont complexes à cause de la turbulence, de la stratification et de leur structure multi-échelles.

Une motivation peut être plus forte est en fait plus théorique. Si le dipôle collisionne sur une paroi, il y a une création de vorticité aux bords de la paroi donc l'enstrophie n'est plus une quantité conservée lorsque la viscosité est nulle, ce qui va donc créer en cascade d'autres dipôles plus petits, ce qui se rapproche d'un processus 3D. Le lien entre les équations d'Euler, où la viscosité est nulle et il y a condition de glissement sur la paroi, et les équations de Navier-Stokes (NS), où la viscosité est non nulle et il n'y a donc pas de glissement sur la paroi, n'est alors pas clair et c'est cela que nous voulons étudier. On pourrait s'attendre à ce que lorsque l'on fait tendre la viscosité vers 0 dans l'équation de Navier-Stokes, on retrouve les solutions de l'équation d'Euler mais la convergence de l'équation de NS vers celle d'Euler n'est vrai qu'en l'absence d'une anomalie dissipative qui subsiste, non visqueuse due aux gradients de vitesses qui tendent vers l'infini dans la couche limite (qui rétrécit lorsque la viscosité tend vers 0) [3]. Étudier le champ de vitesse aux bords de la paroi permettrait donc de mieux comprendre cette anomalie dissipative. L'étude du cas 2D et non 3D est motivé par les équations qui sont plus simples et les simulations numériques qui sont beaucoup plus économes.

Pour le stage, nous nous concentrerons sur l'étude préalable du dipôle avant collision, nécessaire pour maîtriser sa forme et son déplacement, car on veut connaître avec détails l'état du dipôle juste avant la collision. Le dispositif expérimental partant forcément d'une situation 3D, il s'agira également de juger de l'aspect 2D ou quasi-2D des dipôles générés.

1 Dispositif expérimental

Le dispositif est constitué d'une cuve rectangulaire en verre de surface $S = 79 \times 33 \text{ cm}^2$ et de hauteur 38 cm surélevée par un support métallique composé de profilés en aluminium et qui encadre également la cuve (Fig. 1). Une barre métallique horizontale permet de plonger et de translater une sonde conductimétrique qui est aussi une sonde de température et un support en équerre qui sert à guider le tuyau d'injection. Ce dernier est relié à un pousse-seringue dont on contrôle le débit d'injection Q ainsi que la durée d'injection δt . Au bout du tuyau, une aiguille cylindrique d'environ 4 cm de longueur et de diamètre $D = 0.5 \text{ mm}$ sert à contrôler le jet. Une caméra est positionnée à environ 1 m de la cuve et est dirigée vers un miroir incliné à 45° placé sous la cuve. Ce dernier permet d'obtenir une vue simultanée des profils horizontaux et verticaux des vortex. La caméra utilise un objectif de focale 35 mm et est réglée pour enregistrer 10 images par seconde.

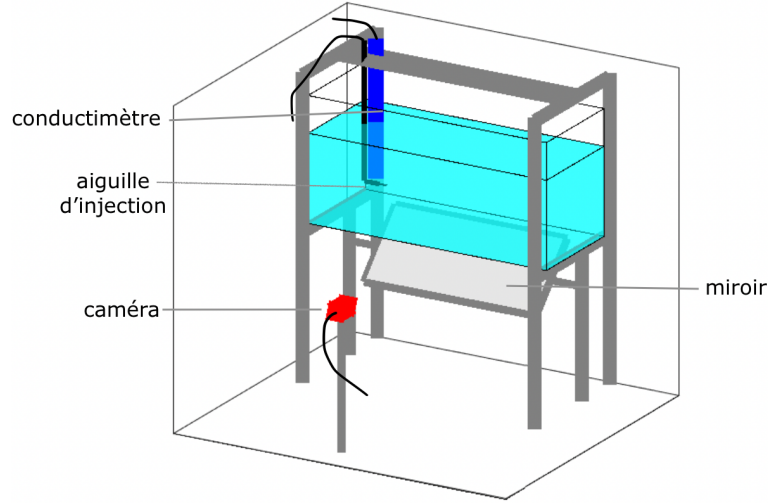


FIGURE 1 – Schéma du dispositif expérimental.

1.1 Méthode des deux bacs

Pour obtenir un gradient de densité linéaire dans la cuve, on utilise la méthode des deux bacs [4]. On place un volume V_a d'eau salée de masse volumique ρ_a dans un premier bac A et un volume V_b d'eau douce de masse volumique ρ_b initialement à $\rho_{eau} = 998 \text{ g.L}^{-1}$, dans bac B. Un débit Q_1 d'eau salée va du bac A au bac B et un débit Q_2 du bac B à la cuve que l'on veut remplir. A l'aide des équations de conservation de la masse et du volume

$$\frac{d(\rho_b V_b)}{dt} = \rho_a Q_1 - \rho_b Q_2, \quad (1)$$

$$\frac{dV_b}{dt} = Q_1 - Q_2, \quad (2)$$

on peut montrer [4] que la densité est linéaire par rapport à l'altitude z pour $Q_2 = 2Q_1$. On remplit la cuve par le bas donc il faut bien que le bac B soit celui de l'eau douce initiale de telle sorte qu'une eau de plus en plus salée soit injectée et que le gradient de densité selon z soit négatif. La densité dans la cuve prend alors la forme :

$$\rho(z) = \rho_{eau} + (\rho_a - \rho_{eau}) \frac{S(H - z)}{2V_b(0)}, \quad (3)$$

avec H la hauteur de l'eau à la fin du remplissage. Les débits sont contrôlés par deux pompes péristaltiques et une pompe d'aquarium est placée dans le bac B pour homogénéiser rapidement la densité du bac B, avec l'arrivée d'eau plus salée du bac A.

1.2 Mesure de la stratification

Une fois la cuve remplie, bien qu'on ait un densimètre à tube vibrant, celui-ci ne pouvant pas être plongé suffisamment profondément la mesure de densité est faite par mesure de la conductivité à différentes altitudes z , en plongeant lentement la sonde pour ne pas casser la stratification, et avec une graduation annotée sur la sonde pour la mesure de z . Pour obtenir la relation qui lie la conductivité σ à la masse volumique ρ_b , on mesure la conductivité de différents échantillons de densité variables (par ajout de plus ou moins de sel) et leur densité à l'aide d'un densimètre à tube vibrant. On obtient ainsi la relation (4) pour une température $T = 22.7\text{ }^\circ\text{C}$ et avec σ en mS.cm^{-1} et ρ en kg.m^{-3} .

$$\rho(\sigma) = 997 + 0.9\sigma + 0.007\sigma^2 \quad (4)$$

La dépendance en température des coefficients de l'équation (4) est négligeable car les expériences réalisées se font toutes entre $22\text{ }^\circ\text{C}$ et $23\text{ }^\circ\text{C}$ et d'après Bouchar [5], une variation de 5°C équivaut à une variation de 3 kg.m^{-3} .

Ainsi avec $Q_1 = 150\text{ mL.min}^{-1}$ et $\rho_a = 1089\text{ kg.m}^{-3}$, on obtient après 4h de remplissage une stratification linéaire en densité comme illustrée sur la Fig. 2. Pour cette expérience on mesure $N = 1.5\text{ rad.s}^{-1}$, où $N \equiv \sqrt{-\frac{d\rho}{dz} \frac{g}{\rho_0}}$ est la fréquence de Brunt-Väisälä (voir Annexe 1). Nous avons gardé N dans une gamme comprise entre 1.5 et 2 tout au long du stage. La non-linéarité au z proche de 0 est potentiellement due à la diffusion proche de la paroi du fond de la cuve. La même mesure a été faite

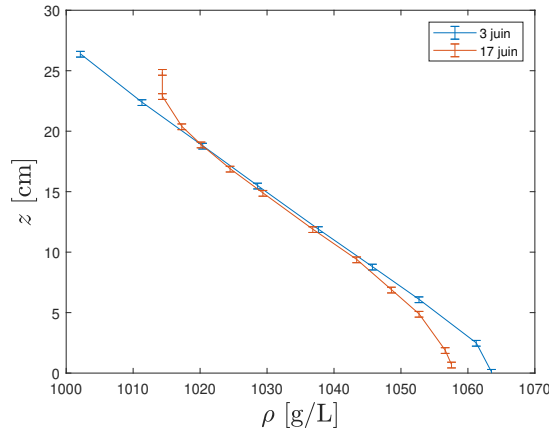


FIGURE 2 – Courbes de la masse volumique du fluide dans la cuve en fonction de l'altitude avant les expériences et 14 jours plus tard après avoir tiré une cinquantaine de paires vortex.

14 jours plus tard après avoir tiré plus d'une cinquantaine de vortex, montrant une grande stabilité de la stratification face aux perturbations. Le léger début d'homogénéisation observé peut aussi être dû à la diffusion du sel et à la convection de l'air au dessus de la cuve.

1.3 Simulation numérique

Une partie des expériences expérimentales est aussi comparée avec des simulations numériques réalisées par Arnaud Guardia qui est en stage de M1. Il utilise la bibliothèque python dedalus pour

résoudre l'équation de Navier-Stokes 2D numériquement avec une méthode pseudo-spectrale et avec comme condition initiale un dipôle de LC (voir 3.3) dans une boîte périodique, donc il ne regarde pas la dynamique du jet. La simulation a pour avantage le contrôle de la viscosité et des conditions initiales mais cependant elle se limite à deux dimensions à la différence des expériences. Les résultats obtenus par les expériences seront donc comparés aux résultats numériques pour discuter de l'aspect 2D ou 3D ou confirmer nos observations.

2 Visualisation avec du colorant

Le but de cette étape a été de mieux comprendre la formation d'une paire de vortex en faisant varier nos paramètres de contrôle : Q le débit et δt le temps de l'injection. Il s'agit de savoir prévoir la forme des dipôles donc il faut tester la reproductibilité des tirs, observer les limites de l'installation et comprendre la relation entre le jet et le dipôle, notamment la relation entre le Reynolds du jet d'injection, défini par $Re_i \equiv \frac{U_i D}{\nu} = \frac{4Q}{\pi D \nu}$ où U_i est la vitesse d'injection et D le diamètre de l'aiguille, et le Reynolds du vortex défini par $Re_v \equiv \frac{2RU_0}{\nu}$ où R correspond au rayon du dipôle, soit le diamètre d'un pôle et U_0 est la vitesse de translation globale du dipôle. Pour mieux décrire le dipôle on définit également $\bar{x}$ la position de la tête du front du dipôle par rapport à la pointe de l'aiguille prise pour origine du repère (à noter que $\frac{d\bar{x}}{dt} \neq U_0(t)$ car $\bar{x}$ ne correspond pas au barycentre du dipôle mais $\frac{d\bar{x}}{dt} \approx U_0(t)$ est une approximation raisonnable).

2.1 Méthode expérimentale

Le liquide d'injection est de l'eau salée dont la densité est exactement celle du fluide à la hauteur de l'injection de telle sorte qu'il ne change pas d'altitude au cours de l'expérience. On choisit sa densité pour avoir une altitude d'équilibre approximativement à mi-hauteur dans la cuve. Du colorant bleu ou rouge y est ajouté pour pouvoir voir les vortex. Au dessus et derrière la cuve sont placés des panneaux LED pour améliorer le contraste sur les deux prises de vues. Lorsque trop de vortex de la même couleur ont été tirés, le colorant est changé pour une autre couleur pour pouvoir continuer à discerner correctement les vortex. L'aiguille au bout du tuyau d'injection est fixé au support en équerre de telle sorte qu'elle est parfaitement à l'horizontale. Pour déterminer son altitude, la conductivité du liquide d'injection est mesurée et le conductimètre est plongé lentement, pour ne pas détruire la stratification, jusqu'à la hauteur où la conductivité affichée est identique à celle du liquide d'injection. Le support qui dirige l'aiguille est alors placée avec les mêmes précautions à la même hauteur. La caméra est ensuite réglée pour se focaliser sur l'aiguille, avec une ouverture assez faible pour avoir une profondeur de champ importante. Une fois l'acquisition de la caméra lancée, le pousse-seringue est activé. Le temps initial est alors repéré sur les vidéos lorsque le début du jet sort de l'aiguille.

2.2 Observations qualitatives

Dans un premier temps nous nous concentrerons sur des jets d'injection turbulents, c'est à dire dont le Reynolds vérifie $Re_i > 200$. La dynamique observée peut être décomposée en deux phases : une phase 1 de jet puis une phase 2 où le vortex est formé, avec une période de transition entre les deux. Au début le liquide injecté est turbulent dans une région conique d'axe x mais est très vite aplati sur l'axe z à cause de la stratification (Fig. 3b). Le jet passe alors d'une dynamique 3D à quelque chose de plus 2D, souvent qualifié de 'pancake'. Le jet ralentit fortement pendant un temps légèrement plus long que le temps d'injection. À la tête du jet, de la matière commence à s'accumuler à cause de ce ralentissement (Fig. 3b), jusqu'à former une sorte de nuage (Fig. 3c). Ce moment correspond à la période de transition où le jet n'a pas encore de forme dipolaire et possède une faible vitesse. C'est

dans cette période que le déclin sélectif opère : partant de ce qui semble être un nuage flou se forme un dipôle, on passe d'un écoulement turbulent à un écoulement laminaire. Ensuite on entre dans la deuxième phase, les vorticités opposées des deux pôles entretiennent la vitesse de translation globale du vortex selon l'axe x . L'écoulement est alors plutôt laminaire. Les éventuelles trainées laissées sur le côté lors de la première phase conduisent à des 'pattes' (Fig. 3d). Ensuite le vortex continue à avancer et les pôles grossissent, plus rapidement selon l'axe y que selon l'axe x c'est à dire que dans son propre référentiel en translation par rapport au référentiel du laboratoire, les pôles s'écartent l'un de l'autre.

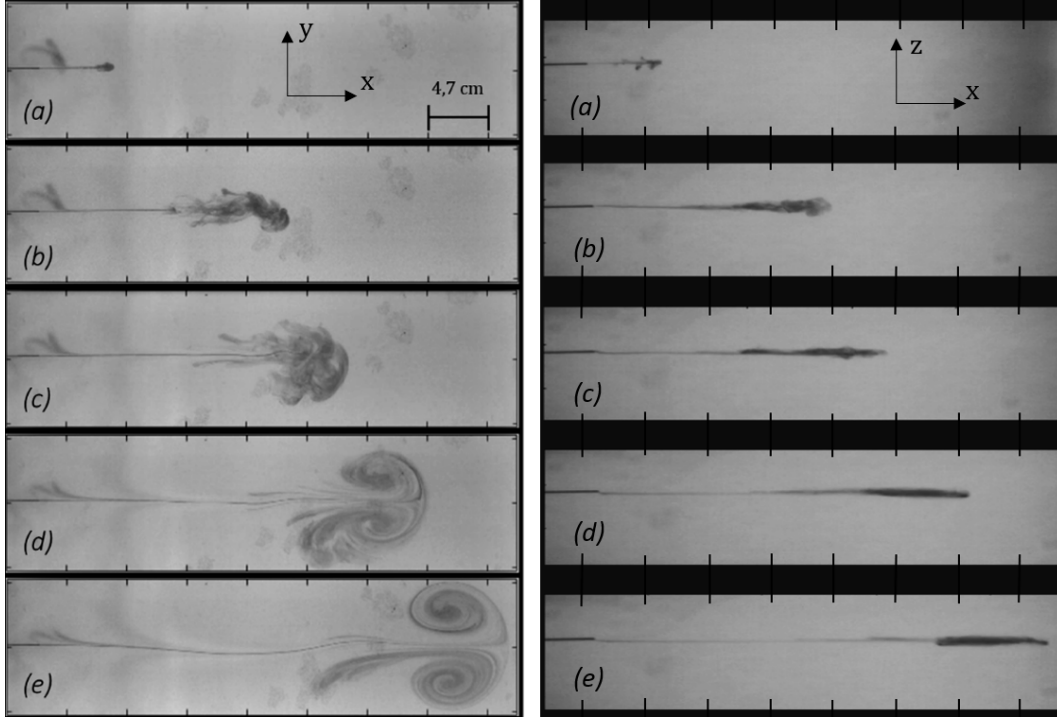


FIGURE 3 – Formation d'un dipôle à partir d'un jet turbulent ($Re_i = 420$) coloré à $t = 1.4$ s (a), $t = 5$ s (b), $t = 9.8$ s (c), $t = 33.9$ s (d), $t = 112.2$ s (e), pour $Q = 10$ mL.min⁻¹, $\delta t = 5$ s et $N = 1.5$ rad.s⁻¹. À gauche, vue de dessous et à droite vue du côté.

On observe une forte dépendance aux conditions initiales : de jets de paramètres identiques peuvent ne pas se ressembler s'ils sont tirés dans un intervalle de temps trop court. En effet même après une quinzaine de minutes, bien que très faible, le champ de vitesse non nul dû aux perturbations causées par le tir précédent peut perturber le jet et le faire prendre une trajectoire courbe et/ou rendre le dipôle asymétrique avec un pôle plus large que l'autre. Il est aussi important d'avoir un pousse-seringue de qualité qui ne donne pas d'à-coups pour avoir un jet continu. Ces effets de sensibilités sont liés à la dynamique turbulente tridimensionnelle de la phase 1 alors que le vortex lui est très stable.

Pour les jets laminaires ($Re_i < 200$), la dynamique de formation est bien différente (Fig. 4). Les deux phases décrites précédemment ne sont pas aussi distinctes, la formation du dipôle commence presque directement après que le jet débute. Au fur et à mesure que la matière injectée rentre dans le dipôle, celui-ci grossit, et une fois le jet terminé, l'expansion est plus lente et ressemble à celle de la phase 2 du cas turbulent (Fig. 4f) : le dipôle possède une vitesse de translation et les pôles s'écartent latéralement. Il est d'ailleurs possible de suivre la fin du jet entre les images Fig. 4d et Fig. 4e. Les jets laminaires forment des dipôles très symétriques et de trajectoire rectiligne qui sont bien plus reproductibles que les dipôles turbulents, car bien moins sensibles aux perturbations initiales. Cependant une fois le dipôle formé, il est tout à fait similaire à ceux originaires d'un jet turbulent.

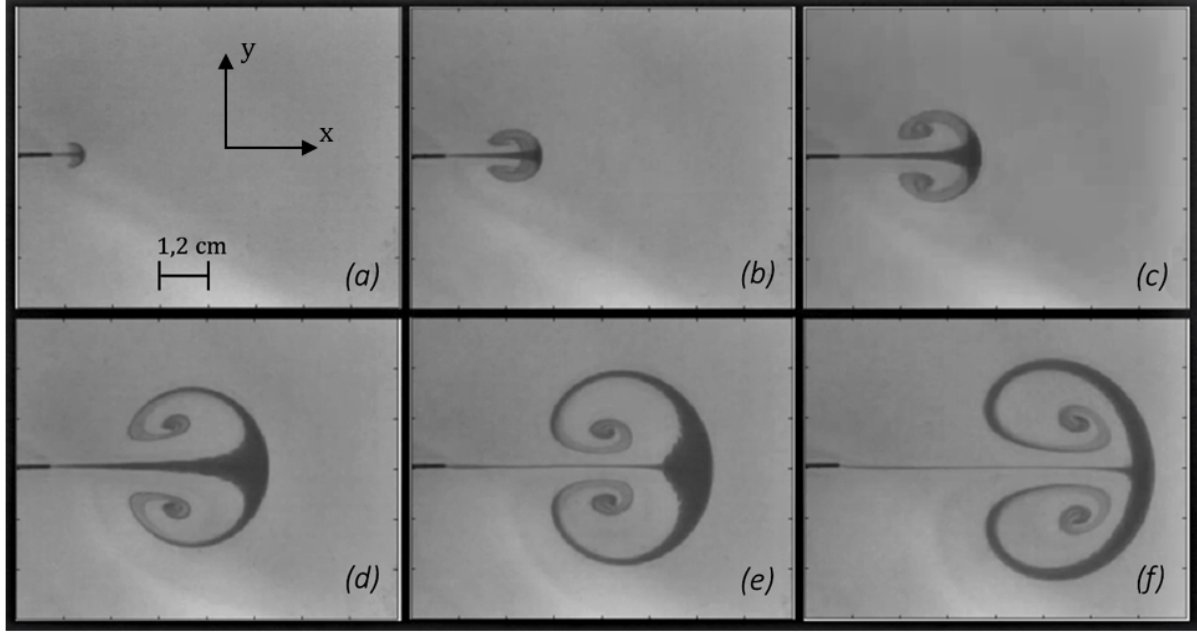


FIGURE 4 – Formation d'un dipôle à partir d'un jet laminaire ($Re_i = 42$) coloré à $t = 3$ s (a), $t = 7.2$ s (b), $t = 13.3$ s (c), $t = 31.3$ s (d), $t = 49.4$ s (e), $t = 85.5$ s (f), pour $Q = 1$ mL.min⁻¹, $\delta t = 36$ s et $N = 1.5$ rad.s⁻¹.

Il est important de noter que la visualisation avec du colorant ne nous permet de voir que le déplacement du liquide injecté, et non celui des particules de fluides environnantes présentes initialement. La taille des vortex et leur centre ne sont donc pas directement visibles et la différence en apparence entre dipôles laminaires et turbulents n'est donc pas forcément si claire quant aux champs de vitesse et de vorticité.

2.3 Résultats quantitatifs

  l'aide du logiciel Matlab, on peut obtenir l'évolution temporelle ainsi que la dépendance en Q et δt de la position du front du dipôle $\bar{x}$ et de la taille latérale du dipôle $2R$. Pour ce faire on utilise un code qui repère les bords du vortex par détection de contraste. Ce code retire d'abord l'image initiale à toutes les images de sorte à retirer le fond et ne voir que le colorant en mouvement. Cependant lorsque trop de tirs ont été effectués, il est difficile d'enlever numériquement le fond initial coloré car il se déplace également lorsque le dipôle passe à côté. Une autre méthode est alors choisie : on pointe manuellement le front du dipôle ainsi que les bords latéraux du dipôle pour un certain nombre d'images.

L'allure des courbes $\bar{x}(t)$ et $2R(t)$ est représentée en échelles logarithmiques sur la Fig. 5. On peut repérer la période de transition entre les deux phases au niveau de l'intersection entre les deux droites indiquant l'évolution temporelle des deux phases. On remarque que l'allure des courbes n'est pas vraiment différente entre jet turbulent (a) et jet laminaire (b) si ce n'est le rapport entre $\bar{x}$ et $2R$ qui est plus faible pour le jet laminaire, ce qui est visible Fig. 4.

Pour l'ensemble des expériences (jets laminaires et turbulents), bien que la mesure de $\bar{x}(t)$ soit difficile, on observe une évolution temporelle pour la phase 1 en $\bar{x}(t) \sim t^n$ avec $n = 0.7 \pm 0.15$ et pour la phase en $\bar{x}(t) \sim t^m$ avec $m = 0.18 \pm 0.03$. Ces valeurs ne semblent pas compatibles avec le modèle proposé par Voropayev *et al* [6] qui donne une évolution en $t^{1/2}$ pour la phase 1 et en $at^{1/2} + bt^{1/3}$

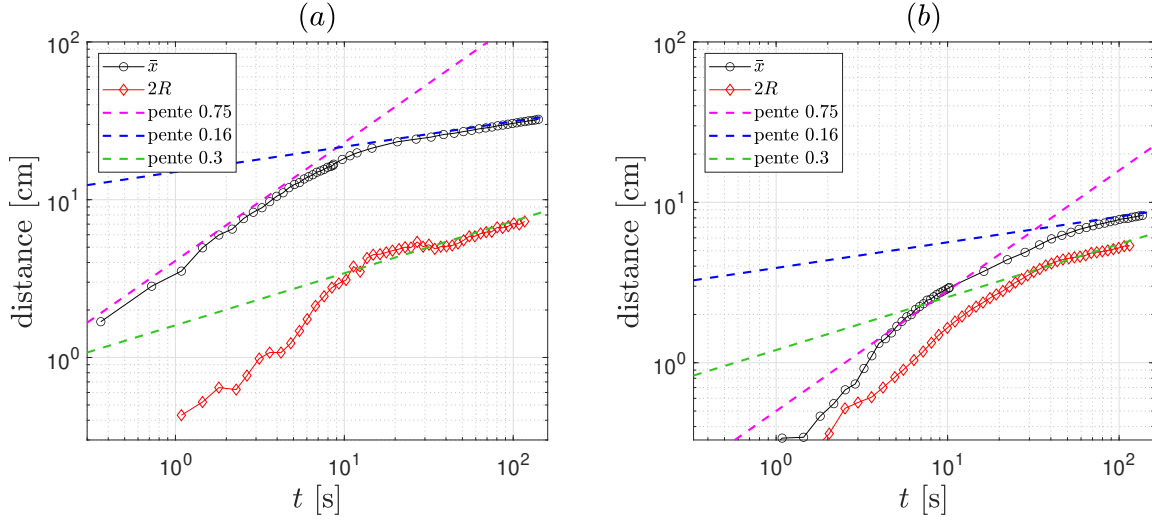


FIGURE 5 – Courbes $\bar{x}(t)$ et $2R(t)$ pour (a) : $Q = 6 \text{ mL.min}^{-1}$ et $\delta t = 7.5 \text{ s}$ et (b) : $Q = 1 \text{ mL.min}^{-1}$ et $\delta t = 36 \text{ s}$.

pour la phase 2. De plus, le modèle décrit une évolution temporelle avec la même puissance de t pour $\bar{x}(t)$ et pour $2R$ alors que nous observons pour la phase 2 que la distance entre les pôles évolue plus rapidement que l'avancement du vortex. En effet pour $2R$ on observe une évolution en $t^{0.3}$ (par la suite (§4.2)), avec une mesure différente on observe une évolution diffusive en $\sqrt{t}$. Pour ce qui est de la phase 1, le dipôle n'est pas encore formé donc $2R$ correspond juste à la largeur horizontale du jet. Il est possible d'observer un palier lors de la période de transition, notamment pour les jets les plus turbulents, correspondant à la phase décrite de "nuage" où le dipôle se forme.

En Fig. 6 sont regroupées les courbes $\bar{x}(t)$ ayant même débit (a) puis ayant même durée d'impulsion (b). A débit fixé, on remarque que la phase 1 suit la même allure et que le phase 2 débute à $t \sim \delta t$. La distance finale parcourue (à $t = 150\text{s}$) croît comme δt . Une régression sur la phase 2 de la forme $\bar{x} = At^m$ est effectuée pour chaque courbe. La régression linéaire de $\log(A)$ en fonction de $\log(\delta t)$ (encadré Fig. 6a) donne une pente de $1/2$, i.e. $\bar{x} \propto \sqrt{\delta t}$, en négligeant la courbe à $\delta t = 1\text{s}$ car a posteriori en regardant la vidéo la durée d'impulsion étant si courte, le dipôle ne se forme pas complètement et la vorticité ne semble pas être assez forte pour entretenir la vitesse de translation, d'où un coefficient A trop bas.   δt fixé, on observe des évolutions temporelles identiques pour chaque phase, avec une transition globalement au même temps qui est légèrement supérieur à δt . La vitesse est croissante avec Q croissant. Sur chaque courbe, une régression sur la phase 2 de la forme $\bar{x} = Bt^m$ est faite puis la régression linéaire de $\log(B)$ en fonction de $\log(Q)$ (encadré Fig. 6b) donne une pente de 1 donc $\bar{x} \propto Q$. Encore une fois la courbe à faible débit $Q = 1 \text{ mL.min}^{-1}$ n'a pas été considérée dans la régression car le dipôle ne se forme pas.

Le même procédé est appliqué aux courbes $2R(t)$ sur la phase 2 uniquement, c'est-à-dire la partie linéaire après le palier sur le graphique en échelle logarithmique. On obtient alors une proportionnalité de $2R$ en $\sqrt{Q}$ et en $\sqrt{\delta t}$.

Pour conclure, on a pour la phase 2 observé :

$$\bar{x} \propto Q \delta t^{1/2} t^{0.18} \quad (5)$$

$$2R \propto Q^{1/2} \delta t^{1/2} t^{1/3} \quad (6)$$

Avec l'approximation $\frac{d\bar{x}}{dt} \approx U_0(t)$ on peut ensuite calculer le Reynolds du vortex. La relation entre

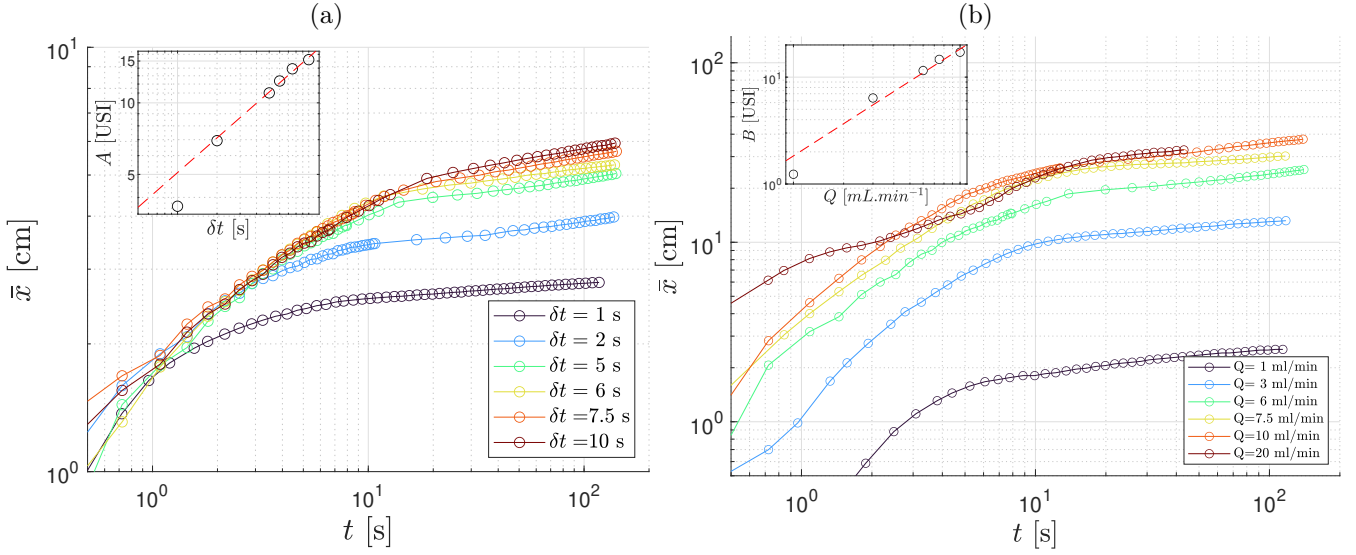


FIGURE 6 – Courbes $\bar{x}(t)$. (a) Variation de la durée d'impulsion δt avec débit fixé à $Q = 6 \text{ mL.min}^{-1}$ et (b) Variation du débit Q avec durée d'impulsion fixée à $\delta t = 5 \text{ s}$.

les Reynolds s'écrit alors :

$$Re_v \propto Re_i^{3/2} \delta t t^{-1/2} \quad (7)$$

où la puissance en t est approximée à $-1/2$ mais a une incertitude de 0.15. La constante $C = \langle \frac{Re_v}{\delta t Re_i^{3/2}} \rangle$, qui dépend entre autre de D , ν et potentiellement N , est calculée en prenant la moyenne sur le temps et sur les expériences. On obtient $C = 1.1 \times 10^{-3}$, donc en tenant compte de la relation (7), pour les δt des expériences réalisées il y a grossièrement un facteur entre 10 et 50 entre Re_i et Re_v , donc même avec des Reynolds d'entrée assez turbulents, le Reynolds du vortex reste plutôt laminaire (nous n'avons pas dépassé $Re_v = 60$). Pour obtenir des Reynolds plus grands il faudrait augmenter le débit ou la durée d'impulsion mais cela conduit à des vortex trop gros et qui vont trop loin, jusqu'à collisionner avec les bords de la cuve. Nous avons vu également que les trop faibles Re_i peuvent donner des jets qui ne créent pas suffisamment de vorticité pour former un dipôle. Nous avons néanmoins un espace de paramètres de contrôle satisfaisant car sur le vortex nous pouvons contrôler plus ou moins sa taille, la distance qu'il parcourt et sa forme, turbulente ou laminaire (Fig. 3 ou Fig. 4).

3 Théorie sur les dipôles tourbillonnaires

3.1  quation du mouvement

Étudions maintenant plus en détail la dynamique du dipôle. Nous allons supposer que la phase de jet qui est à l'origine de la vorticité est déjà passée. Cependant nous allons néanmoins considérer les équations 3D pour ne pas oublier la dissipation verticale d'énergie. Pour décrire la dynamique des vortex on suppose qu'ils vérifient l'équation de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq et que le fluide est incompressible :

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} , \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

où $\mathbf{u}$ est le champ de vitesse, P' et ρ' sont respectivement la différence de pression et de masse volumique par rapport au fluide au repos, $\mathbf{g}$ le champ de gravité, ν la viscosité cinématique de l'eau et ρ_0 la masse volumique moyenne, qui dans l'approximation de Boussinesq est celle devant chaque termes sauf celui de gravité car la partie hydrostatique est contenu dans P' . Pour se placer dans le référentiel du dipôle $\mathcal{R}'$ qui se déplace à la vitesse $\mathbf{U}_0 = U_0(t)\mathbf{e}_x$, on effectue la transformation $t' = t$, $x' = x - L(t)$, $y' = y$, $z' = z$ avec $L(t) = \int_0^t U_0(t')dt'$, soit :

$$\mathbf{u}'(x', y', z', t') = \mathbf{u}(x - L(t), y, z, t) + \mathbf{U}_0(t) . \quad (10)$$

L'équation (9) est inchangée et l'équation (8) devient alors :

$$\frac{D\mathbf{u}'}{Dt} = \frac{d\mathbf{U}_0}{dt} - \frac{1}{\rho_0} \nabla' P' + \frac{\rho'}{\rho_0} \mathbf{g} + \nu \nabla'^2 \mathbf{u} , \quad (11)$$

On remarquera qu'en prenant $U_0 = cste$ le terme $\frac{d\mathbf{U}_0}{dt}$ est nul donc on retrouve le fait que les équations de Navier-Stokes sont invariantes sous transformation galiléenne. Pour simplifier les notations les "primes" seront abandonnés dans la suite.

3.2 Approximation 2D

On peut adimensionner ces équations en posant $x^* = \frac{x}{2R}$, $y^* = \frac{y}{2R}$, $z^* = \frac{z}{2\sigma}$, $u_{x,y}^* = \frac{u_{x,y}}{U_0}$, $u_z^* = \frac{u_z}{V}$ et $t^* = \frac{U_0}{2R}t$ où V est la vitesse caractéristique vertical et σ est la hauteur verticale du vortex, tels que $\alpha \equiv \frac{R}{\sigma} \gg 1$ du fait de la stratification qui confine un fluide à son l'altitude d'équilibre correspondant à sa densité. L'équation (9) s'écrit alors :

$$\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{u} + Fr^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

où le " $\mathbf{h}$ " indique "sur les composantes horizontales x et y " et $Fr^2 \equiv \frac{RV}{U_0\sigma}$ le carré du nombre de Froude [7].

Ce nombre de Froude compare en quelques sortes le 2D au 3D, car selon sa valeur il est possible de négliger le déplacement vertical ou non. On va se placer dans la suite dans le cas où $Fr \ll 1$, donc la dérivée par rapport à z de u_z est négligeable devant $\nabla_{\mathbf{h}} \cdot \mathbf{u}$, ce qui revient à considérer une incompressibilité 2D. On définit ensuite la vorticité par $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{u}$ et la fonction de courant ψ par l'équation de Poisson $\omega = -\nabla^2 \psi$. On peut montrer qu'on peut négliger les termes non linéaires $\omega_{x,y} \frac{\partial u_z}{\partial x,y}$, $u_z \frac{\partial \omega_z}{\partial z}$ et $\omega_z \frac{\partial u_z}{\partial z}$ pour les nombre de Froude petit et donc se placer dans une dynamique quasi-2D où les champs sont 2D mais peuvent dépendre de z (voir Annexe 2). On simplifiera les notations en écrivant $\omega = \omega_z$ et $\psi = \psi_z$. Pour ces grandeurs le changement de référentiel s'écrit :

$$\omega'(x', y', z', t') = \omega(x - L(t), y, z, t) , \quad (13)$$

$$\psi'(x', y', z', t') = \psi(x - L(t), y, z, t) + U_0 y . \quad (14)$$

En prenant le rotationnel de l'équation (11) puis en projetant sur l'axe z et en adimensionnant, on obtient alors avec les approximations précédentes (en omettant les primes sauf pour ψ) :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi') = \frac{1}{Re_v} \nabla_{\mathbf{h}}^2 \omega + \frac{\alpha^2}{Re_v} \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} , \quad (15)$$

avec J le jacobien défini par

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} , \quad (16)$$

correspondant au terme non-linéaire (voir Annexe.2). Ayant $\alpha \gg 1$, on comprend que la dissipation visqueuse verticale est plus importante que la dissipation horizontale, d'où la forme quasi-2D du dipôle.

Pour les temps courts devant le temps caractéristique de diffusion visqueuse, le terme visqueux est négligeable donc on obtient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi') = 0, \quad (17)$$

Il est alors possible de trouver un référentiel où la dynamique est stationnaire ce qui nous laisse seulement le terme non-linéaire, soit $J(\omega, \psi') = 0$ ce qui équivaut à l'existence d'une fonctionnelle F [8] telle que

$$\omega = F(\psi'). \quad (18)$$

C'est cette relation (ω, ψ) qui définit la forme que prend le dipôle [?, 9].

On peut supposer ensuite qu'il existe une échelle de temps intermédiaire où la diffusion verticale prend effet mais la diffusion horizontale est toujours négligeable. Il est possible que cette période de temps correspondent aux moments juste après la formation du dipôle où l'on observe un palier sur les courbes $2R(t)$: il n'y a pas encore de diffusion horizontale mais la vorticité se dissipe néanmoins verticalement.

Aux temps longs, les effets visqueux sont tous les deux présents et dominants donc l'équation (15) (dimensionnée) s'écrit plutôt

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \nabla^2 \omega. \quad (19)$$

Le dipôle va donc diffuser aux temps longs dans son référentiel propre $\mathcal{R}'$.

3.3 Dipôle de Lamb-Chaplygin

Un des modèles de dipôle vortex est le modèle de Lamb-Chaplygin (LC) [10, 11]. Il repose sur l'ansatz suivant pour la relation (ω, ψ) :

$$\omega = \begin{cases} k^2 \psi' & \text{si } r \leq a \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (20)$$

avec $k = cste$ en m^{-1} et a le rayon du dipôle. L'équation (20) et l'équation de Poisson donnent alors pour solution en coordonnées polaires :

$$\psi' = \begin{cases} \frac{-2U_0}{kJ_0(ka)} J_1(kr) \sin \theta & \text{si } r \leq a \\ -U_0(r - \frac{a^2}{r}) \sin \theta & \text{sinon,} \end{cases} \quad (21)$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1. La continuité de ψ' en a impose la relation

$$ka = 3.831, \quad (22)$$

qui est le 1^{er} zéro non trivial de J_1 . La figure (7) permet de visualiser les fonctions ω , ψ et ψ' . Quelques relations numériques caractérisent le dipôle de LC : la distance entre les extrema de vorticité est $d = 0.96a$, le maximum et minimum de vorticité vérifie $\omega_{max} = -\omega_{min} = 2.89kU_0$ et la vitesse maximale est $U_{max} = 2.49U_0$ dans $\mathcal{R}'$ avec U_0 la vitesse du dipôle, soit $U_{max} = 3.49U_0$ dans le référentiel du laboratoire. A l'aide de la fonction de Green de l'équation de diffusion (19) on peut écrire la solution pour la vorticité dans le référentiel du laboratoire pour les temps longs comme :

$$\omega(x - L(t), y, z, t) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4\nu t}}}{4\pi\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' \omega_{LC}(x', y') e^{-\frac{((x-x')^2 + (y-y')^2)}{4\nu t}} \quad (23)$$

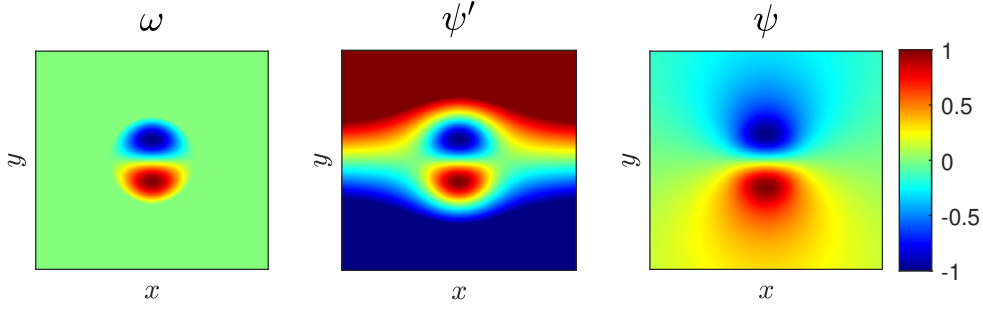


FIGURE 7 – Vorticité ω , fonction de courant ψ' dans le référentiel du dipôle et fonction de courant ψ dans le référentiel du laboratoire d'un dipôle de Lamb-Chaplygin.

avec ω_{LC} le dipôle de Lamb-Chaplygin explicité précédemment [12]. Au temps long, en développant la gaussienne sous l'intégrale, le premier terme étant nul car ω_{LC} est impair en y et pair en x , on obtient l'équivalence :

$$\omega(x - L(t), y, z, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{4\sqrt{2\pi}(\nu t)^{3/2}} W\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2\nu t}}\right) \quad (24)$$

avec $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' y' \omega_{LC}(x', y')$ et $W(\boldsymbol{\rho}) = \rho_y e^{-\frac{\rho^2}{2}}$ qui est une fonction auto-similaire de variable $\boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2\nu t}}$ (voir Annexe 3). On remarquera que la forme asymptotique du dipôle W ne dépend pas de la forme du dipôle initial. De plus W ne correspond pas à ω_{LC} donc un dipôle de LC change de forme au cours de la diffusion, il n'est donc pas auto-similaire.

4 Visualisation par PIV

La visualisation au colorant est très visuelle donc très pratique pour une première approche mais ne rend pas compte fidèlement de la forme de l'écoulement et ne donne pas accès au champ de vitesse qui permet une étude plus quantitative, notamment la comparaison avec le modèle de Lamb-Chaplygin. C'est pourquoi dans la suite nous avons utilisé la technique de PIV (Particle Image Velocimetry en anglais, ou Velocimétrie par Imagerie de Particules en français).

4.1 La méthode PIV

Cette technique très classique en mécanique des fluides [13] consiste à introduire des traceurs (ici des particules sphériques creuses de verre de $10 \mu\text{m}$ de diamètre) qui vont réfléchir la lumière émise par un laser. Bien qu'ayant une masse volumique légèrement supérieure à celle de l'eau, les particules sont suffisamment petites pour suivre le mouvement de l'écoulement sans le perturber. Une caméra acquiert la lumière réfléchi par les particules. La mesure du champ de déplacement est alors obtenue par comparaison des motifs lumineux entre chaque image par calcul des corrélations. Il est important que les particules soient réparties de manière homogène et que la densité de particules ne soit ni trop élevée, auquel cas deux particules voisines ne sont pas discernables entre deux temps, ni trop basse, auquel cas le champ de déplacement ne peut pas être correctement résolu. Cette densité dépend donc de l'écoulement à observer, notamment de la distance caractéristique de déplacement.

L'installation expérimentale est alors modifiée : un laser continu de longueur d'onde 450 nm et de puissance 2.5 W est placé à droite de la cuve. Le plan horizontal que l'on souhaite étudier est éclairé par une nappe laser obtenue en plaçant une lentille cylindrique entre la sortie du laser et la cuve. Pour s'adapter à la densité du liquide injecté et obtenir une nappe horizontale, la hauteur du

plan et son inclinaison sont réglables à l'aide d'un support élévateur. À noter que la nappe doit être parfaitement horizontale à l'entrée de la cuve car la variation d'indice optique due au gradient de densité fait courber le faisceau de manière significative même pour de faibles angles d'entrée. Un drap noir recouvre la cuve pour empêcher la lumière d'entrer et de sortir pour des mesures de sécurité et pour un meilleur contraste à la vidéo. Enfin, les particules de verre sont ajoutées lors du remplissage de la cuve dans les deux bacs A et B. Après une phase de test, la densité de particules choisie est de 15 g.m^{-3} .

Le logiciel permettant d'obtenir le champ de déplacement à partir du film est Davis (LaVision). Il fonctionne en découpant les images en fenêtre d'interrogations comprenant un motif lumineux lié à la présence de particules. Ceux-ci sont repérés sur l'image suivante par plusieurs mesures de corrélation entre les deux images à des résolutions de plus en plus fines. Le déplacement des motifs constitue ensuite le champ de déplacement. Il faut jouer sur la résolution des pixels et l'intervalle de temps entre chaque comparaison de motifs pour obtenir un champ correct. De plus, les pixels dont la corrélation est inférieure à 0.5 sont retirés et remplacés par une interpolation avec les pixels voisins. Les données PIV sont ensuite traitées sur Matlab via la boîte à outils PIVmat [14]. À l'aide du champ de déplacement obtenu, on en déduit la vitesse en fonction du temps et de l'espace puis la vorticité en dérivant. Un lissage par interpolation est appliqué sur les quantités dérivées de manière à obtenir des courbes plus régulières. Pour obtenir la fonction de courant une intégration spatiale de la vitesse est choisie plutôt que la résolution de l'équation de Poisson. Pour se focaliser sur le dipôle et éviter les artefacts aux bords de l'image, on applique un masque circulaire de rayon $2a$ centré sur le dipôle, sauf pour le calcul de ψ pour lequel on laisse les conditions aux bords telles qu'elles sont. La fonction de courant étant définie à une constante près, on choisit celle-ci pour que ψ vaille 0 sur l'axe séparant les deux pôles.

4.2 Comparaison au modèle de Lamb-Chaplygin

L'allure typique des champs obtenus est présentée Fig. 8. Comme pour la visualisation au colorant, on observe quelques dissymétries, néanmoins la forme du dipôle ressemble visuellement plutôt bien à la forme de LC. À partir du champ de vorticité, on peut repérer pour chaque temps la position des extrema et donc accéder à la vitesse de translation et à la position du dipôle pour vérifier les résultats quantitatifs de la visualisation par colorant. Les dépendances en Q et δt du nombre de Reynolds

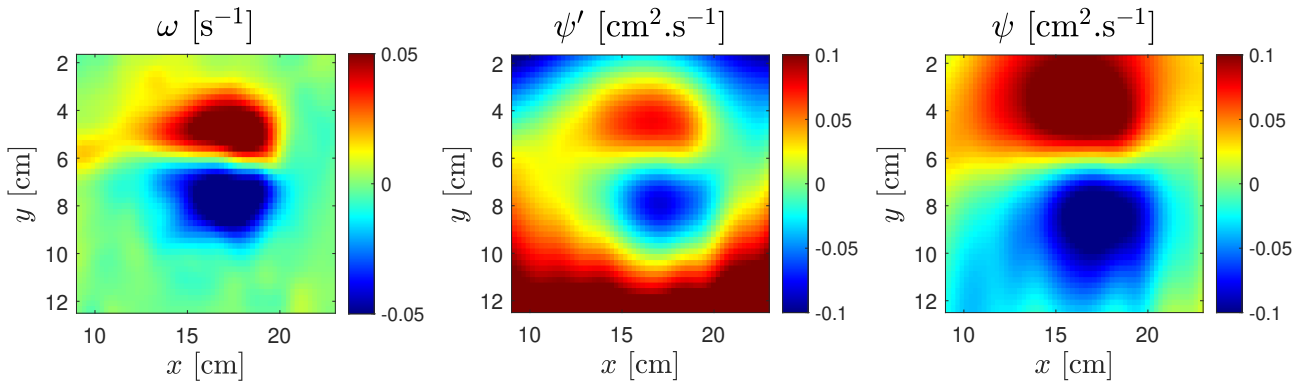


FIGURE 8 – Carte des champs ω , ψ et ψ' à t fixé. $Q = 10 \text{ mL.min}^{-1}$ et $\delta t = 5 \text{ s}$.

Re_v n'ont pas pu être vérifiées correctement car le nombre d'expériences différentes réalisées par PIV est trop faible. Cependant la dépendance temporelle a été remesurée avec plus de précision pour la phase 2 et l'on obtient pour le déplacement global du dipôle une évolution similaire très lente, mais pour l'élargissement latéral du dipôle on observe plutôt une évolution $2R \propto t^{1/2}$ aux temps longs (Fig. 9), ce qui correspond à une évolution caractéristique de la diffusion. Cela corrige également le calcul de

Reynolds qui est évolue plutôt comme $Re_v \propto t^{-1/3}$. La figure Fig. 9 montre aussi l'évolution temporelle de $\omega_0 \equiv \frac{\omega_{max} + |\omega_{min}|}{2}$, qui est très proche de ω_{max} mais permet de lisser les éventuelles dissymétries. On observe alors une pente nette à $-3/2$ (en échelle logarithmique) juste après la formation du dipôle (que l'on repère par le début de la pente $1/2$ sur le graphe $d(t)$ et qui est également visible sur les cartes du champ ω). Cela correspond à la limite asymptotique de la diffusion (24), ce qui veut probablement dire que la troisième phase d'évolution visqueuse horizontale et verticale est atteinte rapidement après la formation du dipôle. Les simulations numériques retrouvent les mêmes évolutions temporelles pour d et ω_{max} quelques secondes après la formation du dipôle (qui correspond à la condition initiale).

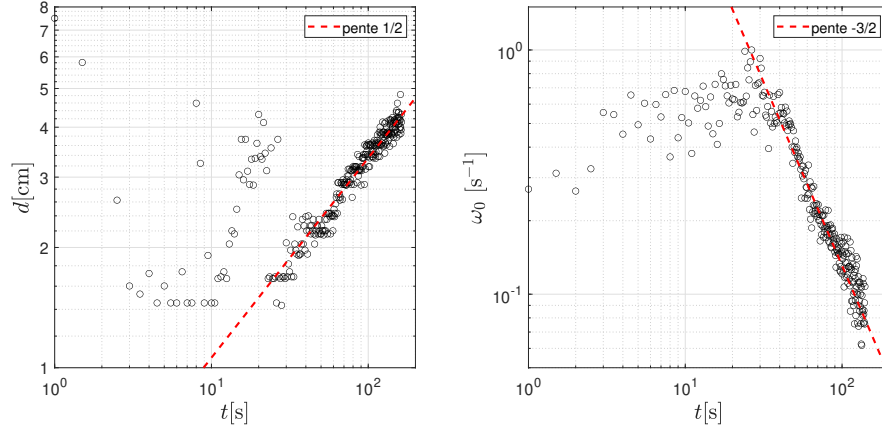


FIGURE 9 – Courbes de $d(t)$ et $\omega_0(t)$ pour $Q = 10 \text{ mL.min}^{-1}$ et $\delta t = 5 \text{ s}$.

Une autre mesure de comparaison est la mesure du rapport $\frac{U_{max}}{U_0}$. La mesure de U_0 est cependant très incertaine car cette vitesse est rapidement faible et la résolution de la PIV n'est pas suffisamment grande donc ce rapport n'a pas pu être correctement mesuré. Dans la suite on pose $U_0 = \frac{U_{max}}{3.49}$ à partir de la mesure plus fiable de U_{max} . Une autre quantité de comparaison est le rapport $\gamma \equiv \langle \frac{\omega_{max}}{kU_0} \rangle = \langle \frac{3.49\omega_{max}}{kU_{max}} \rangle$, qui vaut 2.89 pour le dipôle de LC. Le nombre d'onde k est mesuré à partir de d , distance entre les extrema de vortacité, soit $k = \frac{3.831 \times 0.96}{d}$. Sur l'ensemble des expériences réalisées, on trouve $\gamma = 2.95$ en moyenne, ce qui est légèrement supérieur à 2.89. Cette mesure n'est cependant pas facilement interprétable car elle inclut beaucoup de paramètres différents.

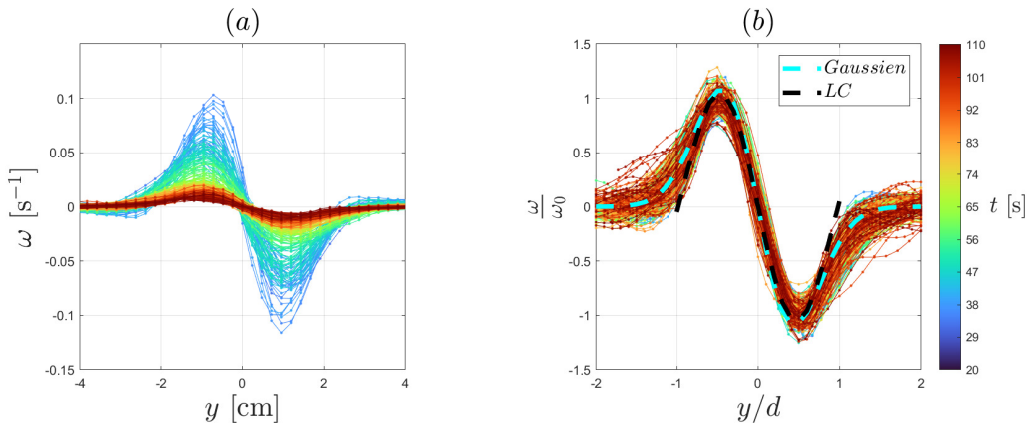


FIGURE 10 – Profils de vortacité au cours du temps (a) et même profils normalisés (b), $Q = 3 \text{ mL.min}^{-1}$, $\delta t = 12 \text{ s}$ et $N = 1.9 \text{ rad.s}^{-1}$.

des travaux théoriques de Turkington [9, 16] montre qu'en partant d'une distribution de type Poisson pour la vorticité on peut aboutir à $\omega = \frac{A\psi}{B^2 - \psi^2}$ avec A et B des constantes. Ayant expérimentalement $\frac{a}{b} = 6.7 \pm 1.0$ on ne peut pas exclure la fonctionnelle en $\sinh$ pour laquelle ce rapport vaut théoriquement 6. La fonctionnelle proposée par Pasmantier est aussi compatible car les coefficients A et B peuvent être choisis.

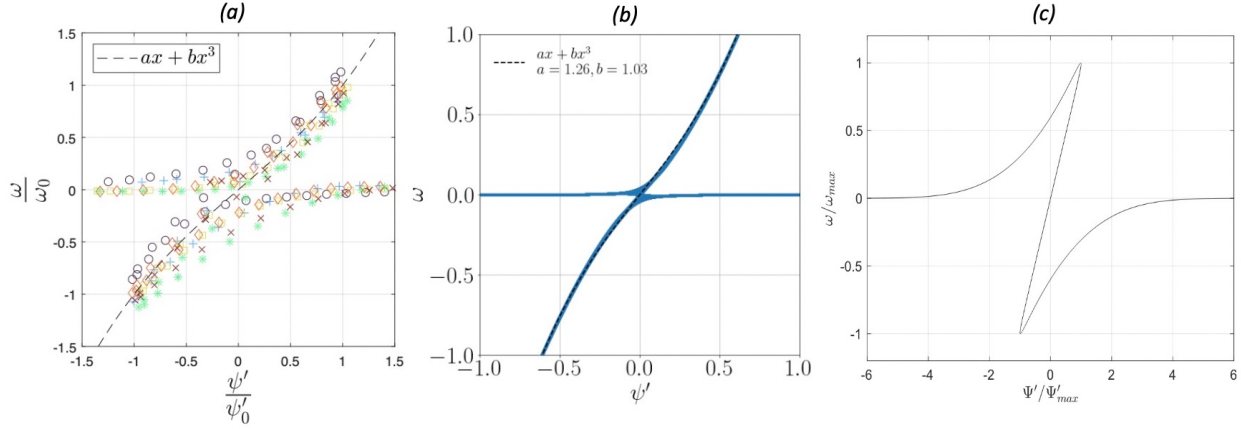
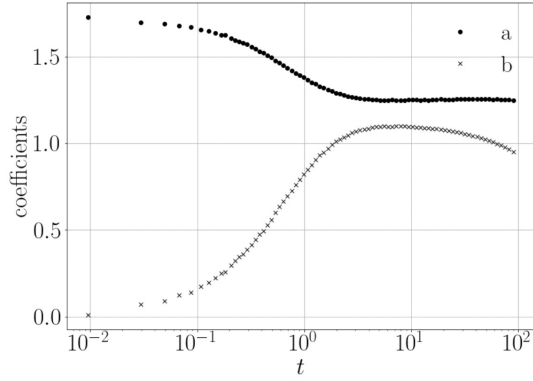


FIGURE 12 – (a) Courbes (ω, ψ) pour sept expériences, (b) Courbe (ω, ψ) numérique (paramètres : $N = 1024$, $\nu = 10^{-3}$, $E(t = 0) = 1$, $R_0 = \frac{\pi}{16}$) et (c) Courbe (ω, ψ) calculée analytiquement à partir de W .

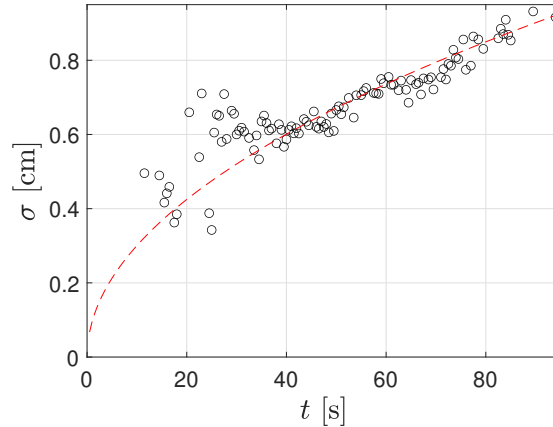
Nous avons pensé que l'allure cubique peut être retrouvée analytiquement en partant de la forme auto-similaire W , vu qu'elle semble mieux correspondre aux courbes obtenues. Pour vérifier cette hypothèse, ψ est obtenue en résolvant l'équation de Poisson (voir Annexe 4) puis on trace W en fonction de ψ (Fig. 12c). On observe le même "écartement" de la courbe que sur les données expérimentales, c'est-à-dire que l'on n'observe pas tout à fait une fonctionnelle. La partie centrale ne présente par contre pas de correction cubique et est plutôt linéaire (un développement de ψ et de W pour r tendant vers 0 aboutit ici à $W \sim \psi + O(y^5)$). Il est possible que le développement asymptotique fait pour obtenir W (24) ne comprenne pas suffisamment d'ordre et qu'avec des ordres plus élevés (en $O(y^3)$) on obtienne la correction cubique et/ou on observe toujours un écartement à la fonctionnelle, ce qui serait contradictoire avec le fait que l'on est pris $J(\omega, \psi) = 0$ pour aboutir à W qui modélise donc une évolution purement diffusive. Il est aussi possible que la correction cubique soit uniquement le fruit d'un processus non-linéaire. Cette possibilité est motivée par l'allure de la courbe du coefficient b calculé numériquement en fonction du temps (Fig. 13).

On remarque que le coefficient b , signature de la forme cubique, semble décroître aux temps longs. Malheureusement, les simulations numériques permettant d'atteindre des temps jusqu'à 10^3 n'ont pas encore été faites au moment de l'écriture de ce rapport mais il est probable que b tende vers 0, c'est-à-dire que la relation (ω, ψ) tende vers une fonction linéaire. Le profil auto-similaire observé dans les expériences correspondrait alors au palier intermédiaire de b autour de $t = 10$, fruit du processus non-linéaire, et serait très proche de W mais pas exactement de cette forme, puis le dipôle diffuserait vers le profil W qui, comme le montre le développement aux faibles r , donne une relation (ω, ψ) linéaire. Ce régime purement diffusif n'a potentiellement pas été observé car il est trop loin temporellement, la vorticité décroissant en $t^{-3/2}$.

FIGURE 13 – Évolution temporelle des coefficients a et b calculés numériquement.

4.3 Profil vertical

Pour observer la diffusion verticale, la caméra filme directement par le côté et on tourne la nappe laser pour qu'elle soit verticale. On obtient par PIV le profil de vitesse horizontal $u_x(z, t)$ à l'abscisse du maximum de vitesse. La hauteur $\sigma(t)$ du 'pancake' est alors définie comme la largeur à mi-hauteur de $u_x(z, t)$ qui est une gaussienne en z d'après l'équation de diffusion (19) [17]. La Fig.14 permet de confirmer que $\sigma \propto \sqrt{t}$. La dépendance en N n'a malheureusement pas pu être correctement évaluée par manque d'expériences car faire varier N implique de renouveler toute l'eau de la cuve. De plus, à cause de la limite de solubilité du sel dans l'eau, pour obtenir N plus grand que 10 rad.s^{-1} il faudrait une hauteur d'eau d'au maximum 2 cm, ce qui expérimentalement serait impossible à réaliser. La

FIGURE 14 – Courbe de la hauteur du dipôle σ en fonction du temps pour $Q = 60 \text{ mL.min}^{-1}$, $\delta t = 0.6 \text{ s}$ et $N = 1.9 \text{ rad.s}^{-1}$.

vitesse verticale u_z ainsi que sa dérivée par rapport à z et celle de ω ont été évaluée pour montrer que les termes $u_z \frac{\partial \omega}{\partial z}$ et $\omega \frac{\partial u_z}{\partial z}$ sont de l'ordre de 10^{-4} s^{-2} et sont donc négligeables par rapport aux autres termes de l'équation (15), ce qui réconforte l'approximation quasi-2D. Dans la même idée, on a évalué V comme la moyenne de u_z , U_0 comme le maximum de u_x (situé au centre du dipôle), R comme la largeur horizontale selon x en supposant qu'elle est du même ordre de grandeur que la véritable largeur latéral selon y , et $\sigma = \langle \sigma(t) \rangle$ pour la longueur caractéristique verticale. Ainsi on a pu estimer

le nombre de Froude carré à $Fr^2 \sim 10^{-2}$. Cela justifie a posteriori l'approximation quasi-2D, du moins pour la phase suivant la formation du dipôle.

Nous avons également pu observer des ondes internes formées par le jet initial (Fig. 15) caractérisées par leur angle θ par rapport à la verticale et leur fréquence f qui vérifient $\frac{2\pi f}{N} = \pm \sin \theta$. Cette relation de dispersion implique que chaque fréquence est associée à un angle et que la fréquence maximale est de $\frac{N}{2\pi}$. On peut aussi en déduire la vitesse de groupe $\mathbf{v}_g = \frac{N}{k} \cos \theta \mathbf{e}_r$ [4]. Le jet étant une fonction porte de largeur δt , sa transformée de Fourier est un sinus cardinal de largeur proportionnelle à $\frac{1}{\delta t} \sim 1$ à $10^{-1} \text{ rad.s}^{-1} < N = 1.9 \text{ rad.s}^{-1}$, d'où la multitude d'angles observés sur la carte du champ de vitesse (Fig. 15). Néanmoins, comme Flor *et al* [2], nous pensons que les ondes internes jouent un rôle négligeable dans la formation du dipôle au vue de leur faible amplitude.

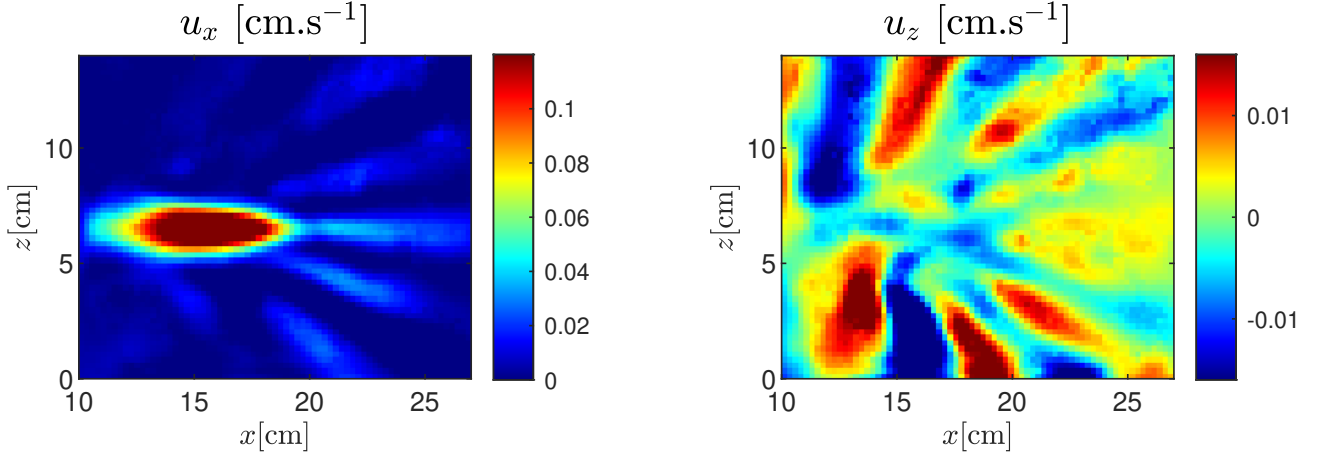


FIGURE 15 – Observations d'ondes internes sur les cartes des champs de vitesse. $Q = 60 \text{ mL.min}^{-1}$, $\delta t = 0.6 \text{ s}$ et $N = 1.9 \text{ rad.s}^{-1}$.

5 Collision avec une paroi

Maintenant que la structure des dipôles et leur dynamique sont un peu mieux connus, nous pouvons commencer à nous attaquer aux problèmes de perturbations avec une paroi. Pour cela une plaque rectangulaire en plexiglas est accrochée à la barre horizontale au dessus de la cuve. La nappe laser n'est pas gênée par la paroi car celle-ci est transparente. Le remplissage de la cuve se fait avec la paroi en place car une fois la cuve remplie, la translation de la paroi entraîne un gros déplacement du fluide pouvant détruire la stratification. C'est donc l'aiguille qui est translatée pour se rapprocher ou s'éloigner de la paroi, de telle sorte que le dipôle soit formé juste avant la collision pour s'assurer de l'aspect 2D du dipôle et de la forme de la vorticité avant la collision. Les premières mesures aux colorants et en PIV sont présentées sur la Fig. 16.

Lors de la collision, les pôles du dipôle se séparent latéralement, ce qui forme en fait un quadripôle avec la vorticité de la paroi qui se scinde en deux dipôles. Du fait de la vorticité arrachée par la paroi, les dipôles ralentissent très vite et entre ensuite dans une phase de diffusion. Contrairement aux simulations numériques effectuées par l'équipe ou par Orlandi [18], nous n'avons pas observé de dipôles qui reviennent collisionner sur la paroi formant ainsi plusieurs structures plus petites, potentiellement à cause d'une dissipation plus forte due à la dimension verticale. Il faut donc probablement générer des dipôles plus énergétiques avec un nombre de Reynolds plus élevé mais cela nécessite une plus grande cuve. Sur la PIV (Fig. 16b), on observe également un peu de vorticité qui est rest  e dans la queue du dipôle.

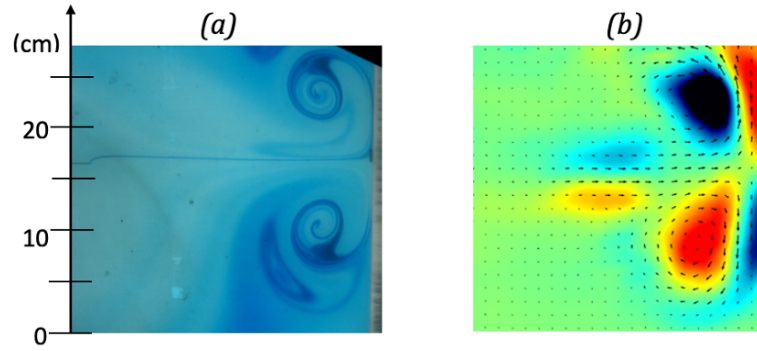


FIGURE 16 – (a) Image d'un dipôle 80 secondes après avoir collisionné sur une paroi. (b) Vorticité d'un dipôle collisionnant sur une paroi (en couleur) et champ de déplacement (flèches). $Q = 10 \text{ mL.min}^{-1}$ et $\delta t = 5 \text{ s}$.

Conclusion et perspectives

Pour conclure, nous avons mis en place un dispositif permettant de générer des dipôles de manière reproductible et dans un milieu stratifié robuste. Nous avons observé que la forme des dipôles dépend à la fois du nombre de Reynolds d'injection, proportionnel au débit d'injection, et du temps d'injection. La nature plus ou moins turbulente du jet joue sur la symétrie et l'allure visuelle des vortex. Toutefois malgré ces différences, les dipôles générés présentent une forme d'universalité structurelle : la technique de PIV et les mesures quantitatives montrent qu'ils sont auto-similaires. L'aspect 2D des dipôles expérimentaux a également pu être quantifié par la mesure d'un nombre de Froude faible. La dynamique des dipôles étant maintenant mieux comprise, la suite est l'étude approfondie de la collision : mesure de la dissipation, du gradient de vitesse au bord de la paroi, variation de la rugosité de la paroi, etc. afin de mieux comprendre les interactions fluide-paroi pour des écoulements 2D.

Références

- [1] W.H. Matthaeus W.T.Stribling D.Martinez and S.Oughton. Selective decay and coherent vortices in two-dimensional incompressible turbulence selective decay and coherent vortices in two-dimensional incompressible turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 66(21) :2731–2734, 1991.
- [2] J. Flór and J. van Heijst. An experimental study of dipolar vortex structures in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 279(1) :101–133, 1994.
- [3] R. Nguyen van yen M. Farge and K. Schneider. Energy dissipating structures produced by walls in two-dimensional flows at vanishing viscosity. *Phys. Rev. Lett.*, 2011.
- [4] C. Brouzet. *Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing*. PhD thesis, Université de Lyon, 2016.
- [5] F. Bouchar. *Mesure de salinité*. Tenum Toulouse.
- [6] Ya.D. Afanasyev S.I. Voropayev and I.A. Filippov. Horizontal jets and vortex dipoles in a stratified fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 227 :543–566, 1991.
- [7] G.P. Chini G. Michel K. Julien C.B. Rocha and C.P. Caulfield. Exploiting self-organized criticality in strongly stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022.
- [8] P.Lévy. A propos du théorème fondamental de la théorie des jacobiens. *L'Enseignement Mathématique*, 1939-1940.
- [9] R.A. Pasmanter. On long lived vortices in 2d viscous flows, most probable states of inviscid 2d flows and a soliton equation. *Physics of Fluids*, 6(3) :1236–1241, 1994.
- [10] S.A. Chaplygin. One case of vortex motion in fluid. *rans. Phys. Sect. Imperial Moscow Soc. Friends of Natural Sciences*, 11(2) :11–14, 1903.
- [11] H. Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, 1932.
- [12] G.K. Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [13] J. Westerweel. Fundamentals of digital particle image velocimetry. *Meas. Sci. Technol*, 8 :1379–1392, 1997.
- [14] F.Moisy. *PIVMat : A PIV post-processing and data analysis toolbox for MATLAB*, 2007.
- [15] D. Montgomery and G. Joyce. Statistical mechanics of "negative temperature" states. *Physics of Fluids*, 17 :1139–1145, 1973.
- [16] B. Turkington. Statistical equilibrium measures and coherent states in two-dimensional turbulence. *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences*, 52(7) :781–809, 1997.
- [17] G. J. F. van Heijst J. B. Flór and R. Delfos. Decay of dipolar vortex structures in a stratified fluid. *Physics of Fluids*, 7 :374–383, 1994.
- [18] P. Orlandi. Vortex dipole rebound from a wall. *Physics of Fluids*, 2(8) :1429–1436, 1990.

Annexe

1 Fréquence de flottabilité ou fréquence de Brunt-Väisälä

Considérons un fluide stratifié, c'est-à-dire dont la masse volumique ρ varie en fonction de l'altitude z dont l'axe est orienté vers le haut. Plaçons nous à une altitude z_0 où la masse volumique ρ_0 est supposée constante sur une tranche de hauteur δz . Considérons un faible déplacement δz d'une particule de fluide. Celle-ci va subir la poussée d'Archimède ainsi que son poids. Le principe fondamental de la dynamique newtonienne nous donne alors

$$\frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{\rho(z_0 + \delta z) - \rho_0}{\rho_0} g = \frac{\frac{d\rho}{dz}(z_0) \delta z}{\rho_0} g, \quad (25)$$

soit une équation d'oscillateur harmonique pour δz car, z étant orienté vers le haut, le gradient de densité est négatif. La fréquence de cet oscillateur, appelée fréquence de flottabilité, est $N = \sqrt{-\frac{d\rho}{dz}(z_0) \frac{g}{\rho_0}}$. On peut généraliser cette définition pour tout z_0 avec $N(z) = \sqrt{-\frac{d\rho}{dz} \frac{g}{\rho_0}}$. Pour nos expériences, le gradient de densité sera choisi constant donc N sera aussi constante.

2 Équation de Navier-Stokes pour ω

On a $\nabla \times \mathbf{U}_0 = 0$, $\nabla \times \mathbf{g} = 0$ et $\nabla \times (\nabla P') = 0$ donc le rotationnel de (11) est (en omettant les primes) :

$$\nabla \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \times \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (26)$$

Sachant que $\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{u^2}{2} + \omega \times \mathbf{u}$ on a alors :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{u}) = \nabla \times \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (27)$$

$$\nabla \times (\omega \times \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \mathbf{u})\omega - (\nabla \cdot \omega)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (28)$$

or $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ et $\nabla \cdot \omega = 0$ donc le terme non-linéaire n'est que $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$. La projection selon z de ce terme s'écrit :

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z = u_x \partial_x \omega + u_y \partial_y \omega + u_z \partial_z \omega - \omega_x \partial_x u_z - \omega_y \partial_y u_z - \omega_z \partial_z u_z \quad (29)$$

Les deux premiers termes sont de l'ordre de $\frac{U_0^2}{(2R)^2}$ et les quatre dernier de l'ordre de $\frac{U_0 V}{4R\sigma}$. Le rapport de l'échelle des quatre derniers termes sur l'échelle des deux premiers est égal à Fr^2 . Ainsi pour $Fr \ll 1$ on ne garde que

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega - (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z = u_x \partial_x \omega + u_y \partial_y \omega = \partial_y \psi \partial_x \omega - \partial_x \psi \partial_y \omega = J(\omega, \psi) \quad (30)$$

car par définition, $u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. Pour ce qui est du terme visqueux on a

$$\nabla \times \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \nu \epsilon_{ijk} \partial_j \partial_l^2 u_k = \nu \partial_l^2 \epsilon_{ijk} \partial_j u_k = \nu \nabla^2 \omega. \quad (31)$$

Ainsi on a bien au final

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi') = \nu \nabla^2 \omega. \quad (32)$$

3 Diffusion aux temps longs

On cherche à développer aux temps longs l'expression :

$$I = e^{\frac{-z^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' \omega_{LC}(x', y') e^{\frac{-((x-x')^2 + (y-y')^2)}{4\nu t}}. \quad (33)$$

En écrivant $(x - x')^2 + (y - y')^2 = x^2 + y^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2$ puis en développant l'exponentielle en série entière on a :

$$I = e^{\frac{-r^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' \omega_{LC}(x', y') e^{\frac{-(x'^2 + y'^2)}{4\nu t}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{xx' + yy'}{2\nu t} \right)^k. \quad (34)$$

Le terme pour $k = 0$ s'annule car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' \omega_{LC}(x', y') e^{\frac{-(x'^2 + y'^2)}{4\nu t}} = 0 \quad (35)$$

car ω_{LC} est pair en x et impair en y . Pour $k = 1$, l'intégrale sur $x' \omega_{LC}(x', y') e^{\frac{-(x'^2 + y'^2)}{4\nu t}}$ s'annule et il reste alors :

$$I = e^{\frac{-r^2}{4\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' \left[\frac{yy'}{2\nu t} + o\left(\frac{y'^2}{(\nu t)^2}\right) \right] \omega_{LC}(x', y') e^{\frac{-(x'^2 + y'^2)}{4\nu t}} \quad (36)$$

$$= e^{\frac{-r^2}{4\nu t}} \frac{y}{2\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' y' \omega_{LC}(x', y') + o\left(\frac{y^2}{(\nu t)^2}\right). \quad (37)$$

En posant $\rho = \frac{r}{\sqrt{2\nu t}}$ on obtient alors :

$$I = e^{\frac{-\rho^2}{2}} \frac{\rho y}{\sqrt{2\nu t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' y' \omega_{LC}(x', y') + o\left(\frac{1}{\nu t}\right), \quad (38)$$

d'où

$$\omega(x - L(t), y, z, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{4\sqrt{2}\pi(\nu t)^{3/2}} W\left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{2\nu t}}\right) \quad (39)$$

avec $C = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' y' \omega_{LC}(x', y')$ et $W(\rho) = \rho_y e^{\frac{-\rho^2}{2}}$.

4 Résolution de l'équation de Poisson à partir de W

On cherche à résoudre

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = \rho \sin \theta e^{\frac{-\rho^2}{2}} \quad (40)$$

En cherchant une solution de la forme $\psi = \rho \sin \theta g(\rho)$ on obtient

$$\partial_\rho(\rho^3 \partial_\rho g) = \rho^3 e^{\frac{-\rho^2}{2}} \quad (41)$$

$$\Rightarrow \rho^3 \partial_\rho g = \int_0^\rho du u^3 e^{\frac{-u^2}{2}} = -(\rho^2 e^{\frac{-\rho^2}{2}} + 2(e^{\frac{-\rho^2}{2}} - 1)) \quad (42)$$

$$\Rightarrow g(\rho) = g_0 + \int_0^\rho du \left(\frac{2}{u^3} (1 - e^{\frac{-u^2}{2}}) - \frac{1}{u} e^{\frac{-u^2}{2}} \right) \quad (43)$$

ce qui conduit à

$$\psi = g_0 \rho \sin \theta + \rho \sin \theta \int_0^\rho du \left(\frac{2}{u^3} (1 - e^{\frac{-u^2}{2}}) - \frac{1}{u} e^{\frac{-u^2}{2}} \right). \quad (44)$$