M2 OAM : Introduction à la turbulence **Automne 2024**

TP3 : Calculs K41

Nous raffinons notre vision sur la turbulence Gaussienne, par des simulations et des calculs.

On rappelle qu'une variable Gaussienne aléatoire $\sim \mathcal{N}(\mu, \boldsymbol{C})$ *est entièrement prescrite par sa fonction caractéristique*

$$\chi(\boldsymbol{t}) := \left\langle e^{i\boldsymbol{t}\cdot\mathbf{X}} \right\rangle = e^{i\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{t} - \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{t}}$$

1. Décomposition de Choleski

Soit $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, une matrice définie positive.

1. Montrer qu'il existe $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonale inférieure telle que $LL^T = C$
2. Soit le vecteur aléatoire $\mathbf{Y} := L\mathbf{X}$ où $\mathbf{X}(\varpi) \in \mathbb{R}^n$ un vecteur Gaussien, c'est à dire dont les composantes sont des variables aléatoires $X_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$
   - Justifier que $\mathbf{Y}$ est Gaussien
   - Calculer la moyenne $\langle Y \rangle$ et la matrice de covariance $C_{ij} := \langle (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})_i (\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})_j \rangle$
3. Simuler 1 réalisation du mouvement Brownien sur $[0, 1]$ avec $N = 128$ points de grille. *Indication: Sous python, on pourra se servir des fonctions numpy.linalg.cholesky et numpy.random.randn*
4. Simuler M réalisations du mouvement Browniens et illustrer la propriété d'invariance d'échelle statistique du Brownien (cf TD2) en comparant les pdf à $t = 1$ et $t = 1/2$.

2. Turbulence Gaussienne numérique

On considère une turbulence Gaussienne homogène isotrope idéale prescrite par

$$C(\mathbf{r}) = \frac{f - g}{r^2} r_i r_j + g(r)\delta_{ij}, \quad f(r) = U_0^2 \left(1 - \left(\frac{r}{L}\right)^{\xi}\right)$$

1. Simuler une réalisation des fluctuations longitudinales d'une turbulence Gaussienne. On prendra: $L = 1, \xi = 2/3, U_0 = 1.$ et N entre 128 et 1024, suivant la ventilation de votre ordinateur.
2. Vérifier le comportement en loi d'échelles de la variance des incréments $\langle \Delta u(r)^2 \rangle$ en fonction de la séparation r.
3. Vérifier numériquement l'invariance d'échelle statistique des incréments de vitesses.

3. Turbulence gaussienne analytique

1. Vérifier la propriété d'isotropie: $O_{il}O_{jl'}C_{ll'}(O^{-1}\mathbf{r}) = C_{ij}(\mathbf{r})$ pour O une matrix orthogonale
2. Vérifier la propriété d'incompressibilité: $g = f + \frac{r}{2}f'$
3. Calculer l'échelle de corrélation des incréments longitudinaux $\lambda_F = \frac{\int_0^r f(r)dr}{f(0)}$

4. Turbulence gaussienne non idéale

Pour modéliser les effets visqueux, on propose de modifier la fonction f comme

$$f_\eta = U_0^2 \left(1 - \left(\frac{r_\eta}{L}\right)^\xi\right), \quad r_\eta := \frac{r^2}{2\eta} + \frac{\eta}{2} \text{ si } r < \eta \text{ et } r \text{ sinon.}$$

1. Calculer l'échelle de Taylor λ_T.
2. Montrer que $\epsilon = -\lim_{\mathbf{r}\to 0} \nu \partial_{ii} C_{jj}(\mathbf{r})$ puis que $\epsilon = 15U_0^2\nu/\lambda^2$.
3. Etablir un lien entre les nombres de Reynolds Re_{L_0} et Re_{λ_T} basés respectivement sur l'échelle de Taylor et l'échelle $L_0 = U_0^3/\epsilon$,